

Grado en Ingeniería Mecánica  
Curso académico 2017-2018

*Trabajo Fin de Grado*

# Estudio aplicado al descenso de un sistema carga-paracaídas y cálculo de su trayectoria

---

Víctor Acero Sancho

Tutor

Javier Rodríguez Rodríguez

8 de octubre 2018



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**



## RESUMEN

El paracaídas ha resultado ser, a lo largo de la historia, un elemento de seguridad aerodinámico esencial, que posee numerosas aplicaciones tanto en la industria, como en el ámbito militar y civil. En este documento se va a realizar un estudio de todas las componentes que rigen el movimiento de un sistema carga-paracaídas durante un descenso controlado, para ello, se ha realizado un experimento con un paracaídas a escala, con el fin de poder recoger datos de interés. Finalmente, con los datos recogidos, se va a estudiar y determinar la trayectoria que recorre el sistema estudiado.

El objetivo de este documento es determinar de manera generalista y con la mayor exactitud posible, la trayectoria que va a seguir un paracaídas con una carga unida a su campana, y compararla con la obtenida en el experimento. Es por esto que se va a plantear un sistema de ecuaciones diferenciales que represente el movimiento en dos dimensiones, y en base a este modelo, se va a desarrollar además un modelo teórico que introduzca los datos del experimento realizado y que contemple las tres dimensiones espaciales.

## MOTIVACIÓN

Aproximadamente en los dos últimos años del grado que he cursado, ha comenzado a gustarme mucho el mundo de la aeronáutica. Me parece una rama de la ingeniería de lo más interesante, y es por esto que he elegido este tema a modo de introducción, para, en un futuro, dedicarme a la aeronáutica. He aprendido mucho debido a que los cálculos que he manejado durante la realización de este trabajo no formaban parte del temario de ninguna asignatura de mi grado. Es por esta razón, que este proyecto me ha sido doblemente instructivo a título personal.

En un ámbito más general, me ha parecido interesante este tema por las numerosas aplicaciones que tiene. Ya que el paracaídas unido a una carga cualquiera, se usa de manera prácticamente diaria en muchos ámbitos tanto civiles como militares, y resulta tremendamente interesante conocer su posición en cada momento.

## Palabras clave

Paracaídas, Sistema, Trayectoria, Resistencia aerodinámica, Arduino

## DEDICATORIA

Este proyecto no hubiera salido adelante si no llega a ser por:

Mis padres y mi hermana Andrea. Gracias por darme todo vuestro apoyo a lo largo de estos cuatro sufridos años, por aguantarme malas contestaciones y cabreos cuando no me salían las cosas como quería y por saber aconsejarme en las más intrincadas situaciones. Los tres suponéis un ejemplo diario para mí, me inspiráis a superarme cada día, a poner todo lo que tengo en cada tarea y labor que se me encomienda... En definitiva, os agradezco que seáis los mejores padres, y hermana, que cualquier persona podría tener. Esto va por vosotros, os quiero.

A Lara. No solo te agradezco todo tu apoyo incondicional, sino que estoy seguro de que, si no llega a ser por ti, posiblemente este grado hubiera durado algo más de cuatro años y medio para mí. De todo lo que he conseguido, una pequeña parte es gracias a ti, porque nunca te has cansado de levantarme cuando estaba hundido, porque siempre has estado conmigo luchando en todas las batallas que se me han presentado, porque eres lo más bonito de este mundo, esto va por ti. Te quiero

También me gustaría nombrar a Dani. Has sido mi guía en la tormenta, me has aconsejado, ayudado, y resuelto, cada duda que se me planteaba en el camino. Me has salvado muchas veces de tomar decisiones erróneas, me has transmitido toda tu experiencia, y por todo ello, te agradezco todos los sabios consejos que me has aportado.

Por último, no me quiero olvidar de Lorenzo. Sin su ilusión, sus ganas de ayudar y sus manos prodigiosas, este proyecto no habría podido salir a delante. Gracias Loren

Por todos vosotros.

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN .....	3
MOTIVACIÓN .....	3
Palabras clave .....	3
DEDICATORIA .....	4
ÍNDICE DE CONTENIDOS .....	5
ÍNDICE DE FIGURAS .....	7
ÍNDICE DE TABLAS .....	8
1. INTRODUCCIÓN .....	10
1.1 Breve historia del paracaídas .....	10
1.2 Componentes de un paracaídas .....	11
1.3 Funciones y tipos de paracaídas .....	12
2. DESCENSO DE UN PARACAÍDAS .....	15
2.1 Descripción del sistema de fuerzas .....	15
2.1.1 Masas .....	16
2.1.2 Ángulos .....	16
2.1.3 Fuerzas aerodinámicas .....	16
2.2 Etapas del descenso .....	17
2.2.1 Caída libre .....	18
2.2.2 Apertura del paracaídas .....	18
2.2.3 Descenso estacionario .....	20
3. EXPERIMENTO CON UN PARACAÍDAS .....	23
3.1 Materiales del experimento .....	23
3.2 Lanzamiento .....	25
3.3 Obtención de datos .....	26
3.4 Filtrado de datos .....	28
3.4.1 Eliminación de datos corruptos .....	28
3.4.2 Concatenación de la caída .....	29
3.5 Análisis de resultados .....	30
3.5.1 Lanzamiento uno .....	30
3.5.2 Lanzamiento dos .....	31
3.5.3 Lanzamiento tres .....	32
4. CÁLCULO DE LA TRAYECTORIA Y PROCESADO DE DATOS .....	35

4.1	Consideraciones previas .....	35
4.2	Cálculos y mediciones previas.....	36
4.2.1	Cálculo del centro de masas sin masa aerodinámica.....	36
4.2.2	Cálculo del centro de masas con la masa aerodinámica.....	38
4.3	Modelo de trayectoria en dos dimensiones.....	39
4.3.1	Ecuación que describe el movimiento sobre el centro de masas.....	40
4.3.2	Ecuaciones que describen el movimiento del sistema.....	43
4.3.3	Ecuaciones adicionales .....	44
4.3.4	Sistema completo final, resolución del sistema y condiciones iniciales ..	45
4.3.5	Resultados obtenidos .....	47
4.4	Modelo teórico de trayectoria en tres dimensiones.....	56
4.4.1	Ejes del cuerpo y rotaciones .....	56
4.4.2	Dinámica de la rotación.....	60
4.4.3	Cinemática de la rotación .....	69
4.4.4	Cinemática de la traslación.....	72
4.4.5	Dinámica de la traslación .....	73
4.4.6	Ecuaciones finales y condiciones iniciales.....	75
4.4.7	Trabajos futuros .....	76
5.	PRESUPUESTO Y APLICACIONES DIRECTAS .....	77
5.1	Presupuesto .....	77
5.2	Aplicaciones directas del estudio.....	78
5.2.1	Suelta de una carga desde un avión .....	78
5.2.2	Globos meteorológicos .....	78
6.	MARCO REGULADOR Y DERECHOS DE AUTOR.....	80
6.1	Marco regulador.....	80
6.2	Derechos de autor .....	80
7.	BIBLIOGRAFÍA .....	81
	ANEXO A: VÍDEOS DEL EXPERIMENTO .....	83
	ANEXO B: CÓDIGO DE MATLAB.....	84
	ANEXO C: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL ARDUINO .....	88
	ANEXO D: MATRIZ $M\phi\beta\theta$ Y $M\phi\beta\theta T$ .....	89

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1: Diseño de un paracaídas por Leonardo da Vinci [1]</b> .....	10
<b>Figura 2: Esquema de fuerzas en un paracaídas</b> .....	15
<b>Figura 3: Sistema de eyección en un caza F-16 para bajas velocidades (modo 1) y altas velocidades (modo 2)</b> .....	19
<b>Figura 4: Concepto de estabilidad estática [2]</b> .....	20
<b>Figura 5: Ángulo de ataque en función del tipo de campana [2]</b> .....	21
<b>Figura 6: Arduino (izq) módulo receptor (dcha) y caja protectora.</b> .....	23
<b>Figura 7: Paracaídas casero del experimento</b> .....	24
<b>Figura 8: Porción de datos suministrada por el arduino</b> .....	26
<b>Figura 9: Ejemplo de datos corruptos</b> .....	27
<b>Figura 10: Gráfica de la temperatura en el lanzamiento 3</b> .....	28
<b>Figura 11: Gráfica de las aceleraciones del lanzamiento 3</b> .....	29
<b>Figura 12: Gráfica de las aceleraciones sin filtrar del lanzamiento uno</b> .....	31
<b>Figura 13: Gráfica de las aceleraciones en el lanzamiento dos ya filtrada</b> .....	32
<b>Figura 14: Gráfica filtrada de las aceleraciones en el lanzamiento 3</b> .....	33
<b>Figura 15: Gráfica de las velocidades de rotación filtradas en el lanzamiento 3</b> ...	34
<b>Figura 16: Gráfica del campo magnético filtrado en el lanzamiento 3</b> .....	34
<b>Figura 17: Esquema simplificado del centro de masas sin fuerzas inerciales</b> .....	37
<b>Figura 18: Esquema simplificado del centro de masas con fuerzas inerciales</b> .....	38
<b>Figura 19: Vector <math>x</math> con las variables del problema</b> .....	46
<b>Figura 20: Gráficas de los coeficientes aerodinámicos frente al ángulo de ataque</b> ..	46
<b>Figura 21: Vector <math>x_0</math> con las condiciones iniciales</b> .....	47
<b>Figura 22: Gráfica de la velocidad de rotación</b> .....	47
<b>Figura 23: Gráfica de la orientación</b> .....	48
<b>Figura 24: Gráfica de la velocidad lineal en Y</b> .....	49
<b>Figura 25: Gráfica velocidad lineal en Z</b> .....	49
<b>Figura 26: Gráfica de la posición instantánea en el eje Y</b> .....	50
<b>Figura 27: Gráfica de la posición instantánea en el eje Z</b> .....	51
<b>Figura 28: Gráfica de la trayectoria del sistema</b> .....	51
<b>Figura 29: Gráfica de la velocidad de rotación (caso 2)</b> .....	52
<b>Figura 30: Gráfica de la orientación (caso 2)</b> .....	53
<b>Figura 31: Gráfica de la velocidad lineal en el eje Y (caso 2)</b> .....	53
<b>Figura 32: Gráfica de la velocidad lineal en Z (caso 2)</b> .....	54
<b>Figura 33: Gráfica de la posición instantánea de Y (caso 2)</b> .....	54
<b>Figura 34: Gráfica de la posición instantánea de Z (caso 2)</b> .....	55
<b>Figura 35: Gráfica de la trayectoria (caso 2)</b> .....	55
<b>Figura 36: Esquema de las distintas rotaciones</b> .....	56
<b>Figura 37: Esquema de la rotación sobre el eje Y</b> .....	64
<b>Figura 38: Esquema de la rotación sobre el eje <math>X'</math></b> .....	65
<b>Figura 39: Esquema de fuerzas del sistema y sus respectivos ejes</b> .....	73
<b>Figura 40: A400M descargando cargas desde su bodega</b> .....	78
<b>Figura 41: Globo meteorológico</b> .....	79

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1: Descripción de diferentes campanas de paracaídas .....</b>	<b>14</b>
<b>Tabla 2: Significado y unidades de los datos.....</b>	<b>27</b>
<b>Tabla 3: Datos dimensionales y másicos del experimento .....</b>	<b>36</b>
<b>Tabla 4: Valores obtenidos para <math>L_c</math> y <math>L_p</math> .....</b>	<b>37</b>
<b>Tabla 5: Valores finales de <math>L_c</math> y <math>L_p</math> .....</b>	<b>39</b>
<b>Tabla 6: Operaciones de fila realizadas a la matriz <math>A</math> .....</b>	<b>72</b>
<b>Tabla 7: Presupuesto del experimento.....</b>	<b>77</b>





## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 Breve historia del paracaídas

El origen de la palabra paracaídas proviene de las palabras francesas *parare* y *chute*, (significa escudo y caída respectivamente) pero es necesario mencionar, que la primera concepción de lo que nosotros consideramos un paracaídas hoy en día, surgió en China a comienzos del siglo XII como modificación de una cometa diseñada para soportar grandes pesos.

A pesar de que los orígenes sean de la antigua China, el primer vuelo documentado data del siglo IX d.C, donde el filósofo y estudioso Abbás Ibn Firnás saltó desde la torre más alta de Córdoba con una lona a modo de “freno”, resultando levemente herido. Pero no fue hasta el Renacimiento italiano (Siglos XV-XVI) donde Leonardo Da Vinci mostró al mundo los primeros diseños realizados en lino, y con la intención de poder amortiguar la caída de un humano desde cualquier altura.



Figura 1: Diseño de un paracaídas por Leonardo da Vinci [1]

Ya por el octubre de 1797 el francés André-Jaques Garnerin realizó el que es considerado como el primer descenso (se lanzó desde un globo) realizado con total éxito. Este suceso generó tal confianza que se comenzaron a realizar las primeras exhibiciones para el entretenimiento de los espectadores.

A comienzos de la primera guerra mundial, el uso de los globos aerostáticos como observatorios móviles capaces de traspasar las líneas enemigas, reforzó la posición del paracaídas (por aquel entonces fabricados en algodón) por la cantidad de vidas que salvó, a causa de los numerosos globos destruidos por parte de las ametralladoras enemigas. Con la introducción de la aviación en 1914, se generó el dilema de si sería posible salvar al piloto en caso de derribo por las fuerzas enemigas, pero la solución a este problema se retrasó debido al reducido tamaño de las cabinas, que imposibilitaban introducir un paracaídas. Además, debido a la baja altura de vuelo, los paracaídas no se abrían por completo, puesto que necesitaba de mayor tiempo para su despliegue total. No fue hasta 1916 donde se salvó por primera vez la vida de un piloto de avión, ya que se dieron cuenta

de que la vida del piloto era tremendamente valiosa por el alto coste en formación que recibía [2].

En la segunda década del siglo XX finalmente se decidió implantar, en todos los pilotos y personal de cabina de manera obligatoria y estandarizada.

El periodo de entreguerras sirvió para la investigación, puesto que surgieron nuevos materiales, estructuras, y otras funciones del paracaídas, como el lanzamiento de pesadas cargas desde gran altura o el despliegue de tropas. Al comenzar la Segunda Guerra Mundial, (1939) con la tecnología mucho más desarrollada que en la primera gran guerra, Wallace Hume Carothers patentó el nailon como principal sustitutivo de la seda y el rayón, por lo que Estados Unidos decidió comenzar a fabricarlo para implantar su uso en la tela y las cuerdas de los paracaídas, gracias a sus excelentes propiedades mecánicas. Además, con el avance en la aviación, se requirió un sistema de frenado adicional en los aviones de combate durante la maniobra de aterrizaje, surgiendo así otra nueva función, la de aerofreno.

Ya por la década de los 60, la guerra de Vietnam provocó que continuaran las investigaciones, desarrollándose nuevas formas para el pabellón del paracaídas aplicadas a numerosos ámbitos militares. En suma, al conflicto de Vietnam, Estados Unidos se vio inmersa en la carrera espacial con la URSS, que provocó la implantación del paracaídas en los módulos espaciales durante la reentrada a la Tierra. Destaca el primer aterrizaje en abril de 1961 donde Yuri Gagarin aterrizó a salvo con la nave Vostok I, mientras que, por el lado americano, el astronauta John Glenn aterrizó con su nave Mercury en febrero de 1962.

A partir de 1970 gracias al descubrimiento por parte del ingeniero Bill Booth del sistema de las tres anillas [1], que permitía una rápida liberación, se popularizó de manera masiva en todo el mundo el paracaidismo deportivo. Este hecho permitía que cualquier persona que quisiera, pudiera disfrutar de la experiencia sin necesidad de una formación previa.

## 1.2 Componentes de un paracaídas

Como el caso que se estudia en este documento hace referencia a paracaídas no personales, es decir, pensados para conectar una carga cualquiera y sin ningún tipo de guiado, los componentes principales son [1]:

- Campana o pabellón: es la esencia del paracaídas puesto que es el componente que realiza el frenado mediante la desaceleración de la corriente de aire circundante durante la caída. Existen numerosas formas diferentes, cada una con unas características propias, pero todas ellas con una cualidad en común: la apertura. Todo paracaídas necesita un breve periodo de tiempo en el cual la tela se despliega por completo, dependiendo de si en el inicio del descenso el paracaídas está totalmente plegado o desplegado desde el comienzo de la caída, el tiempo de apertura será mayor o menor.

- Cuerdas: fabricadas en nailon y con una alta resistencia a la tracción, conectan la campana con el arnés de la carga. Dependiendo del peso de la carga, se usa un mayor o menor número de cuerdas.
- Arnés: es el sistema que sujeta la carga con las cuerdas del paracaídas.
- Carga: puede ser de todo tipo, desde material bélico y munición en el ámbito militar, material humanitario o algún módulo espacial.

En el caso de los paracaídas personales, a los elementos anteriores habría que añadir el dispositivo de despliegue, un paracaídas de emergencia adicional y el sistema de guiado para dirigir y orientar la caída.

### 1.3 Funciones y tipos de paracaídas

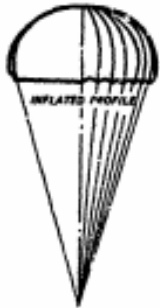

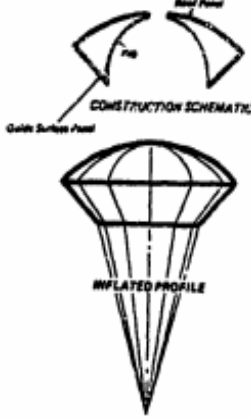
Una buena definición para un paracaídas es la de decelerador aerodinámico, es decir, consiste en un objeto cuya principal función es aumentar la resistencia al avance de un cuerpo en un medio fluido, normalmente aire. Es por ello que el paracaídas tiene muchas aplicaciones en el sector aeronáutico, entre las que destaca:

- Deceleración de vehículos espaciales durante su reentrada a la atmósfera
- Aerofreno de aviones caza y bombarderos en la fase de aterrizaje
- Decelerador para cargas lanzadas desde aviones a gran altura o despliegue táctico
- Frenado de vehículos terrestres que alcanzan altas velocidades
- Uso recreativo en actividades de ocio como paracaidismo o salto base

Para conocer la amplia gama de paracaídas que existen, es necesaria realizar una clasificación en función de algunas de sus más importantes características [3]:

- Porosidad: es uno de los aspectos más importantes, puesto que influye en aspectos del descenso como la velocidad de caída, el inflado, o la trayectoria que va seguir. Existen telas muy porosas, medio-porosas, o impermeables.
- Guiado: una vez se conozca la finalidad del decelerador, es necesario decidir si se requiere un guiado manual, que permite planear durante la caída en la dirección que se desee, o si por el contrario se desea que descienda de manera autónoma y libre. Si el uso final es para una persona, es altamente recomendable establecer el guiado para poder controlar la caída y así, evitar daños personales. Sin embargo, si se desea decelerar una carga de cualquier tipo, no se exige guiado alguno. Es por esto que podemos dividir los paracaídas en “planeadores” o “no planeadores”.
- Dimensiones: dependiendo del uso que se le vaya a dar, el paracaídas deberá tener unas dimensiones determinadas, como el diámetro de fabricación que se establece cuando la tela se encuentra extendida en reposo, la longitud de sus cuerdas o el tamaño del arnés. Todo esto repercute en la inercia del sistema, la velocidad de descenso y la estabilidad durante la caída.

- Forma del pabellón: existen numerosas formas del llamado pabellón. Su elección va en función de sus características aerodinámicas y del uso que se le vaya a dar, algunos de los más usados son [2]:

Tipo de Campana	Uso más frecuente	Características
<b>Campanas con tela sólida o no ranurada</b>		
<p><b>FLAT CIRCULAR CANOPY</b> CONSTRUCTION SCHEMATIC</p> 	Con un bajo coste y un bajo peso, esta campana es la más utilizada para el despliegue de mercancías y para el descenso de personas sin guiado	Aunque posea cierta inestabilidad, es recomendable que para un correcto despliegue de este paracaídas, no existan velocidades muy altas
<p><b>EXTENDED SKIRT CANOPY</b> CONSTRUCTION SCHEMATIC</p> 	Adecuado para el descenso de mercancías desde gran altura y para la recuperación de drones	Con un mayor grado de resistencia aerodinámica que la campana circular convencional, tiene como contra un mayor tiempo de apertura.
<p><b>GUIDE SURFACE CANOPY</b> CONSTRUCTION SCHEMATIC</p> 	Con fines de extracción rápida, este paracaídas es usado normalmente cuando el piloto de un avión de combate necesita eyectarse del avión	Permite la apertura tanto a bajas como a grandes velocidades (desde 0 a 3 Mach). Además, posee un alto grado de porosidad que le confiere una gran estabilidad y fácil apertura

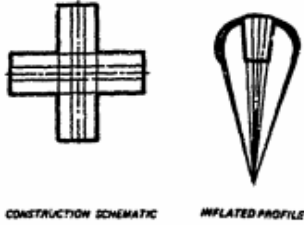


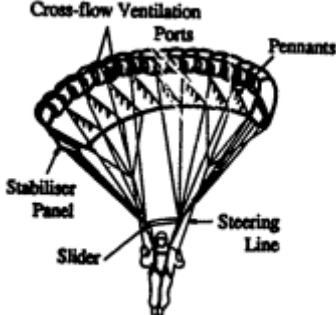
Campanas con tela ranurada		
<p><b>CROSS CANOPY</b></p>  <p>CONSTRUCTION SCHEMATIC      INFLATED PROFILE</p>	<p>De bajo coste y fácil construcción, es normalmente usado para la desaceleración de vehículos terrestres y de aviones durante el aterrizaje</p>	<p>Con un adecuado grado de resistencia al avance y de porosidad, confieren una buena estabilidad, pero su forma de cruz le genera una cierta tendencia a rotar sobre su eje de simetría</p>
<p><b>RIBBON CANOPY</b></p>  <p>CONSTRUCTION SCHEMATIC      INFLATED PROFILE</p>	<p>Al ser una campana muy resistente, es adecuado para el frenado de vehículos a alta velocidad</p>	<p>Aunque tenga una menor eficiencia aerodinámica que una campana no ranurada, posee una excelente estabilidad</p>
<p><b>RING SLOT CANOPY</b></p>  <p>CONSTRUCTION SCHEMATIC      INFLATED PROFILE</p>	<p>Semejante al caso anterior pero con un cuerpo más ancho, es barato de fabricar y se usa para el descenso de cargas a gran velocidad y en el frenado de aviones</p>	<p>Posee unas características muy semejantes al caso anterior</p>
Paracaídas con guiado		
	<p>Usado únicamente cuando el guiado es requerido, se usa para el despliegue de tropas en el ámbito militar o para actividades recreativas tales como el parapente o el paracaidismo</p>	<p>La forma de su campana le genera una superficie sustentadora que le permite planear</p>

Tabla 1: Descripción de diferentes campanas de paracaídas

## 2. DESCENSO DE UN PARACAÍDAS

### 2.1 Descripción del sistema de fuerzas

Si simplificamos al extremo la idea de paracaídas, se puede observar que no es más que un sistema compuesto por tres elementos principales (tela, carga y cuerdas), que realiza un movimiento en un campo fluido. A modo de guía para este proyecto, se va a usar el documento realizado por Hume [4], en el cual se establece un sistema de fuerzas semejante al presentado en la figura:

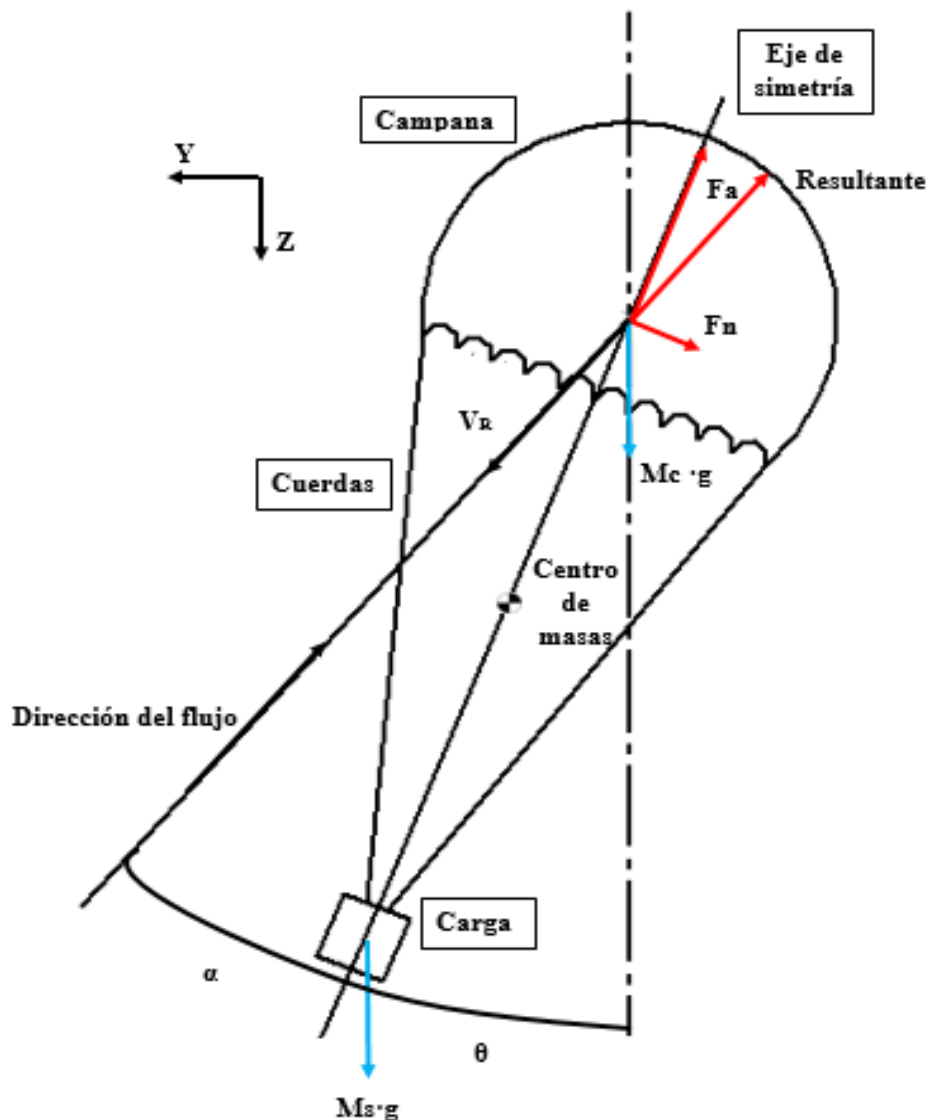


Figura 2: Esquema de fuerzas en un paracaídas

Como se puede ver en el esquema anterior existen dos tipos de fuerzas. Las rojas, son fuerzas aerodinámicas que surgen como consecuencia del movimiento producido por las fuerzas azules; estas son debidas a la aceleración de las distintas masas existentes en el sistema. A continuación, se explica todos los componentes de la figura 2.

### 2.1.1 Masas

Las masas descritas en el sistema paracaídas-carga son:

- $M_c$ : es la masa de la carga que se desea transportar. Como se ha mencionado anteriormente va unido a las cuerdas mediante un arnés, ya sea una persona, o una mercancía.
- $M_p$ : es la masa de la tela del paracaídas medido en tierra. El peso de las cuerdas también se incluye en este apartado puesto que van unidas a la tela del paracaídas
- $M_a$ : corresponde a la masa añadida o masa aerodinámica. Este concepto hace referencia a la masa de aire que se ve acelerada a causa del movimiento del propio paracaídas. Esta masa ficticia o inercial, se suele añadir a la masa del propio paracaídas, y es necesario mencionar lo complejo que resulta obtenerla. Una buena aproximación propuesta por R.Hume es [4]:

$$M_a = 0.916\pi R^3 \rho \quad (2.1)$$

Donde:

- $R$  es el radio de la campana en el momento en el que se encuentra totalmente inflado medido en metros
- $\rho$  es la densidad del aire ( $1.225 \text{ kg/m}^3$ )

### 2.1.2 Ángulos

Se puede observar que existen dos ángulos diferentes, los cuales son:

- $\alpha$ : se trata del ángulo que mide la dirección del flujo de aire con respecto al eje de simetría del paracaídas, también conocido como ángulo de ataque. Si se desea conocer en qué posición el sistema se encuentra en equilibrio, es de vital importancia saber el valor del ángulo de ataque, que, principalmente, depende de parámetros como la forma de la campana del paracaídas, y la dirección del flujo incidente.
- $\theta$ : es el ángulo que forma el eje de simetría del sistema con la vertical

### 2.1.3 Fuerzas aerodinámicas

En el sistema anteriormente descrito se puede observar dos fuerzas perpendiculares localizadas en el origen de coordenadas del sistema.

- $F_n$ : denominada fuerza normal o sustentación, esta fuerza es perpendicular al eje de simetría del paracaídas. Nuevamente, dependiendo del tipo de paracaídas que se utilice, la sustentación cobra mayor o menor importancia. En el caso de los paracaídas simples de campana circular sin guiado, esta fuerza es prácticamente nula puesto que durante el descenso apenas existe planeo, sin embargo, en paracaídas con guiado, es de vital importancia. Esto se debe a que, para conseguir el planeo fundamental para el guiado, es necesaria la existencia de una superficie



con perfil alar para conseguir la sustentación propia de estos paracaídas (Ver tabla 1).

- $F_a$ : paralela al eje de simetría y perpendicular a la fuerza normal, esta fuerza conocida comúnmente como fuerza de arrastre, es la que genera el frenado que caracteriza a los paracaídas. Es quizás la característica más importante, la que hace ser a un paracaídas lo que es en realidad, un freno. Además determina otros parámetros como la velocidad de descenso, y es un factor determinante en el equilibrio y estabilidad durante la caída [2].

Ambas fuerzas, son representadas comúnmente con sus respectivos coeficientes adimensionales, muy utilizados en mecánica de fluidos. Hay numerosos estudios y experimentos que determinan estos coeficientes experimentalmente, que resultarán de gran importancia a la hora de realizar cálculos como la trayectoria. Se determinan:

$$C_n = \frac{F_n}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad (2.2)$$

$$C_a = \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad (2.3)$$

Donde:

- $\rho$  es la densidad del aire en las condiciones del descenso, medida en  $\text{kg/m}^3$
- $V$  es la velocidad resultante del que lleva el paracaídas medida en  $\text{m/s}$  que se puede obtener gracias a la expresión:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (2.4)$$

Donde:

- $V_x, V_y, V_z$  son los valores de las velocidades lineales en cada uno de los ejes coordenados
- $A$  es el área nominal de la campana medida en  $\text{m}^2$  obteniéndose de:

$$A = \pi R^2 \quad (2.5)$$

Donde:

- $R$  es el radio del paracaídas cuando se encuentra totalmente desplegado

## 2.2 Etapas del descenso

Una buena definición de lo que supone el descenso de una carga es: el periodo de tiempo en el que una masa sufre una aceleración súbita al encontrarse a una altura considerable,

desde la que cae libremente. Por tanto, teniendo en cuenta esta definición, se puede observar que existen tres fases claramente diferenciadas en el descenso de un paracaídas, ya sea para una persona o para una carga cualquiera.

### 2.2.1 Caída libre

La duración de esta fase depende principalmente de la altura desde la cual comience el descenso. Por ejemplo, no es lo mismo lanzar a una persona desde un avión a unos 5000 metros sobre la superficie de la Tierra, a que se lance desde un edificio donde necesita abrir el paracaídas a los pocos segundos de saltar. El comienzo de esta fase coincide con el inicio del descenso, donde la masa del cuerpo sufre una aceleración muy alta debido a la fuerza de la gravedad. Una vez se haya acelerado considerablemente desde el reposo, se llega a la llamada velocidad límite, es decir, la velocidad máxima que se puede como consecuencia de la resistencia generada por el rozamiento con el aire. Este parámetro depende en gran medida de:

- El área frontal del cuerpo en descenso, ya que a mayor superficie en contacto con el aire mayor resistencia se generará.
- También influye considerablemente la densidad del aire, porque a medida que se aumenta la altura, la densidad disminuye al reducirse la masa de aire por unidad de volumen, lo que repercute a una menor resistencia aerodinámica con respecto a un aumento de la altura.

En definitiva, la caída libre es la primera etapa del descenso y la fase previa a la apertura del paracaídas, en ella se alcanzan altas velocidades con el peligro añadido del alto descontrol producido durante la caída.

### 2.2.2 Apertura del paracaídas

Quizás por ser el periodo más crítico de todo el descenso, la apertura es un punto clave a tener en cuenta ya que determinará el resto del descenso. Esta fase comienza con el despliegue del paracaídas, puede estar plegado en una mochila como es el caso de los paracaídas personales, o atado a una carga de manera semidesplegado (no está plegado en ninguna parte, pero tampoco está totalmente desplegado desde el comienzo). Es necesario mencionar que debido a que la campana del paracaídas varía su forma hasta que se abre por completo, y por tanto finaliza esta fase, la apertura está considerada como un fenómeno de inestabilidad aerodinámica [2].

Durante la apertura, se puede observar tres etapas claramente diferenciadas:

- 1- El final de la caída libre, es decir, prácticamente no existe ninguna fuerza que actúe sobre la campana del paracaídas, por lo que aún no comienza la apertura.
- 2- La segunda fase comienza con el despliegue del paracaídas, esto se debe a que las fuerzas de interacción entre la carga y el paracaídas, como consecuencia de la tensión que se genera en las cuerdas, empiezan a actuar, por lo que la apertura

comienza. Esta fase finaliza cuando las costuras de la tela en su parte superior están enteramente estiradas a causa del inflado de la campana.

- 3- La última fase es aquella que finaliza con la apertura total. Una vez acaba el estirado de las costuras superiores (final de la fase 2), la forma circular de la campana permite la aparición de una pequeña abertura por la que comenzará a introducirse el aire necesario para el inflado de la campana, por lo que esta fase finalizará cuando la abertura circular haya aumentado su área hasta el valor nominal de trabajo.

Es necesario mencionar, que, durante esta fase, existe la posibilidad de que se produzca el llamado *Squidding* [2]. Este fenómeno, se produce principalmente por sobrepasar la velocidad crítica de apertura (la velocidad máxima del flujo de aire a la cual el paracaídas puede abrirse) o en el caso contrario, no llegar a sobrepasar la velocidad crítica de cierre (velocidad mínima del flujo para que se produzca la apertura completa del paracaídas), ya que se genera un equilibrio prematuro entre la carga radial producida por la presión del ambiente, y la tensión estructural a la que se ve sometido la campana. Los factores más importantes que producen este fenómeno, a parte de la velocidad del flujo alrededor del paracaídas, son la porosidad de la tela y el tipo de campana que se utilice.

La consecuencia más desdeñable del *Squidding* es el colapso del paracaídas, que, a causa del equilibrio de fuerzas anteriormente mencionado, bloquea la apertura del paracaídas a un cuarto del diámetro nominal de trabajo, perdiéndose así la capacidad de frenado para el que está pensado el paracaídas. Para evitar que ocurra este fenómeno es necesario escoger adecuadamente la forma correcta de la campana en función de la aplicación que vaya a tener, por ejemplo, en el caso de trabajar con velocidades supersónicas como puede ser el caso de la eyección de un piloto de un caza de combate, es altamente recomendable colocar una campana ranurada tipo Ribbon (ver tabla 1) que facilita la apertura a elevadas velocidades.

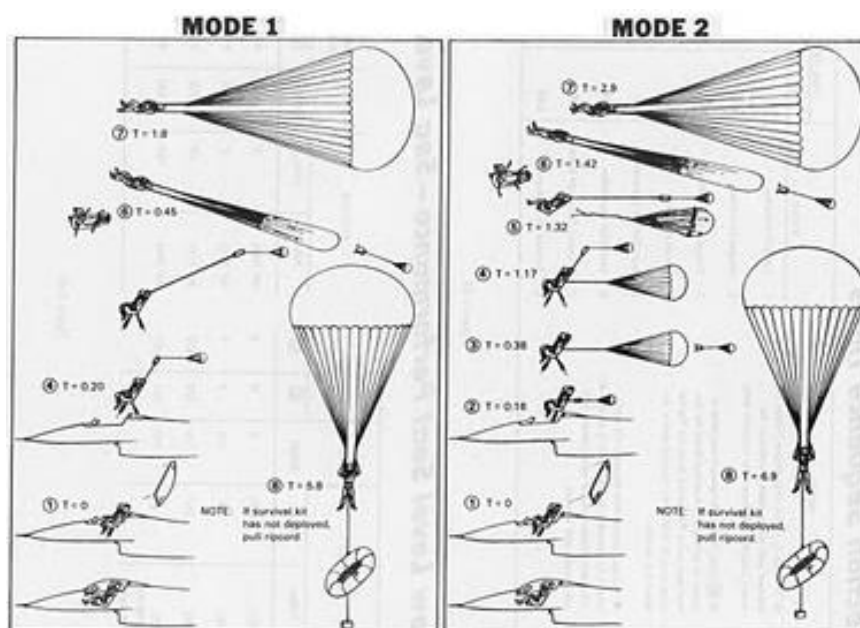


Figura 3: Sistema de eyección en un caza F-16 para bajas velocidades (modo 1) y altas velocidades (modo 2)

En definitiva, la apertura del paracaídas es una etapa clave del descenso, ya que determina si el resto del descenso se hará de forma controlada y correcta, o si por el contrario caerá de manera brusca a causa de una apertura incorrecta. Además, es la etapa previa a la última fase del descenso, el vuelo estacionario.

### 2.2.3 Descenso estacionario

Se considera que esta fase comienza cuando el paracaídas está totalmente desplegado y en plenitud de todas sus funciones, y finaliza con el impacto de la carga o persona en la superficie terrestre.

Se trata de un vuelo estacionario por el hecho de que se desciende con una velocidad prácticamente constante, salvo en determinadas excepciones donde el despliegue se produce a gran altura, ya que a medida que el sistema desciende, se generan grandes variaciones en la densidad del aire que repercute directamente en la velocidad de descenso.

Para poder describir con mayor exactitud lo que ocurre durante esta fase, se puede asemejar el movimiento del sistema carga-paracaídas al de un péndulo, para poder introducir el concepto de estabilidad estática [2]. Este fenómeno se produce en un péndulo cuando, desde su posición de equilibrio se aplica un pequeño desplazamiento, y como consecuencia se genera un momento que tratará de devolver el sistema al equilibrio inicial.

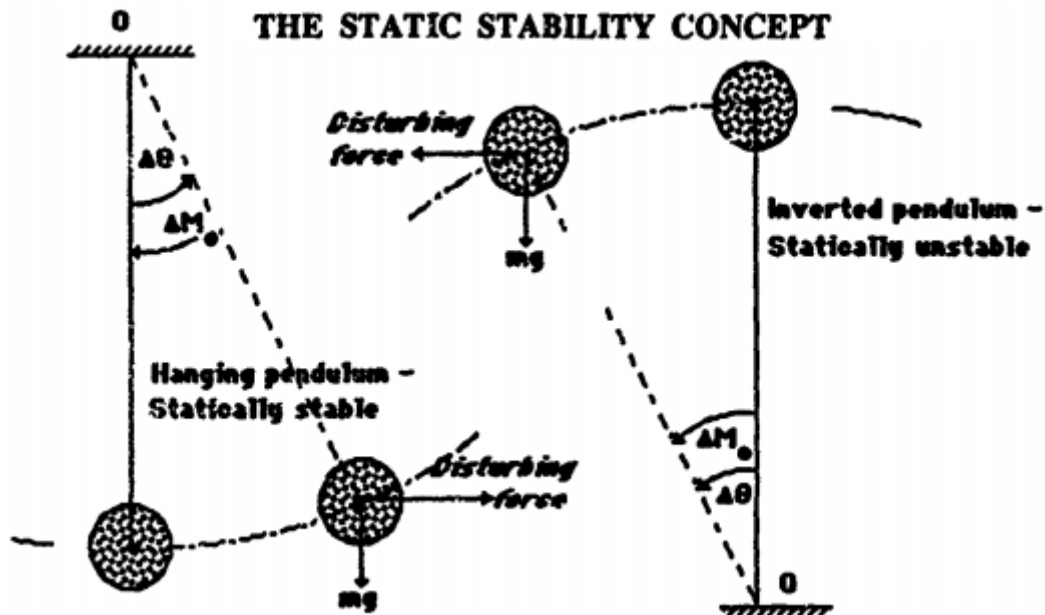


Figura 4: Concepto de estabilidad estática [2]

Como se puede observar en la figura 4, la generación de la fuerza perturbadora en el sistema provoca a su vez la aparición de un momento de fuerzas sobre el punto O. Este momento lo genera la componente perpendicular a la cuerda que corresponde al peso de la bola, que trata llevar al sistema a su posición de equilibrio inicial. Por tanto, se puede concluir que el sistema está totalmente en equilibrio cuando se cumple:

$$M_0(\theta) = 0 \quad (2.4)$$

Y bajo un pequeño desplazamiento:

$$\frac{dM_0}{d\theta} < 0 \quad (2.5)$$

Como se ha mencionado antes, el movimiento de un péndulo es perfectamente extrapolable a un paracaídas, aplicando únicamente la correspondencia de cambiar teta por alfa (ángulo de ataque en la figura 2). Gracias a numerosos estudios, se puede conocer, en función de la campana del paracaídas, el ángulo de ataque con el cual el sistema llega a un equilibrio de momentos durante el descenso.

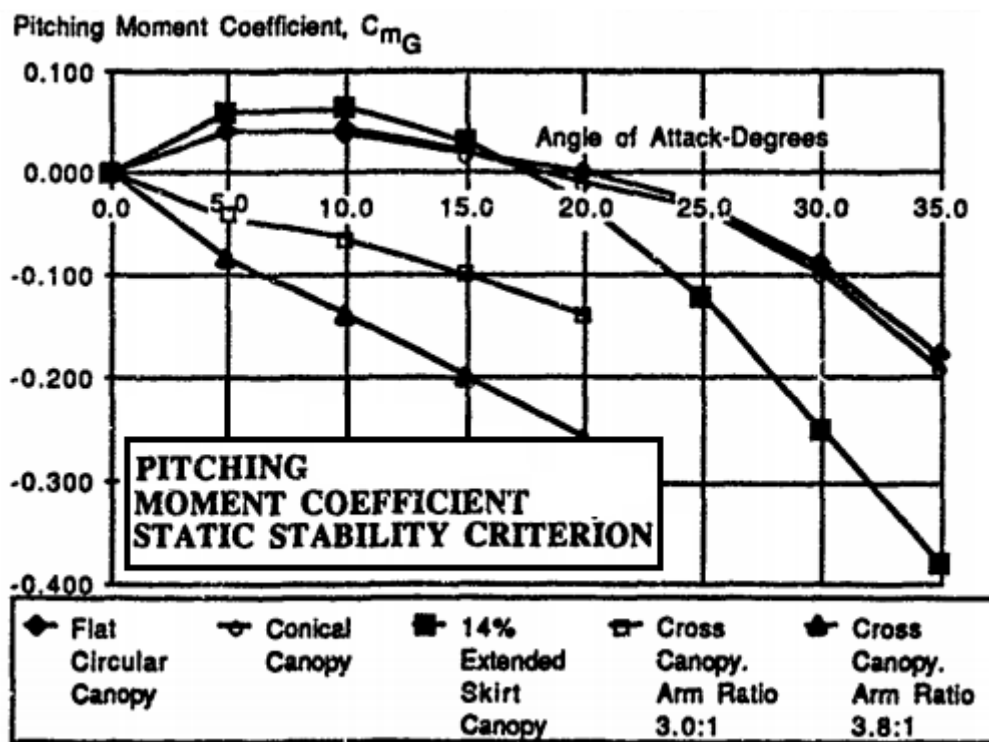


Figura 5: Ángulo de ataque en función del tipo de campana [2]

Como se puede observar en la figura anterior, y teniendo en cuenta las características de cada una de las campanas estudiadas, se concluye que la campana en forma de cruz es la más estable de todas con un ángulo de ataque 0 para la posición de equilibrio, es decir, que el descenso debería ser prácticamente recto en su totalidad. Sin embargo, para las clásicas campanas circulares, que ofrecen una cierta inestabilidad en el descenso, se observa que el ángulo de ataque para el cual se llega al equilibrio son 20°. Esto quiere decir, que, durante el descenso, la campana circular realizará un movimiento pendulatorio que oscilará entre 20° y -20° [2].

Otro factor de vital importancia que afecta al descenso del sistema, es la porosidad. Ya que un aumento de esta propiedad supone una considerable estabilidad adicional sea cual sea el tipo de campana usada. Sin embargo, un aumento de la porosidad conlleva también

una bajada del coeficiente de resistencia aerodinámica ( $C_a$ ) que se refleja en un aumento de la velocidad de descenso.

En definitiva, tanto la estabilidad estática como la porosidad son factores que determinan el tipo de descenso que seguirá el sistema carga-paracaídas. Existen descensos inestables pero lentos, con consecuencia de un alto ángulo de ataque y una baja porosidad, o por el contrario descensos sin apenas pendulaciones destacables, pero con una alta porosidad y velocidad de descenso.

### 3. EXPERIMENTO CON UN PARACAÍDAS

Para conocer y analizar con mayor detalle las características típicas del descenso de una carga con un paracaídas, y para obtener el perfil de un vuelo típico, se decidió realizar un experimento a partir de un paracaídas de fabricación casera.

#### 3.1 Materiales del experimento

- Arduino: Como el objetivo principal del experimento es la recogida de datos durante la caída, se utilizó un arduino con un módulo giroscópico, otro módulo compuesto por un acelerómetro y otro por un medidor de campo magnético. De esta manera, el arduino puede enviar datos en tiempo real al ordenador mediante un pequeño módulo de radio provisto de una antena receptora de señal. La alimentación necesaria para el correcto funcionamiento la suministra una pila conectada mediante un adaptador (las especificaciones del arduino se pueden ver en el Anexo C).

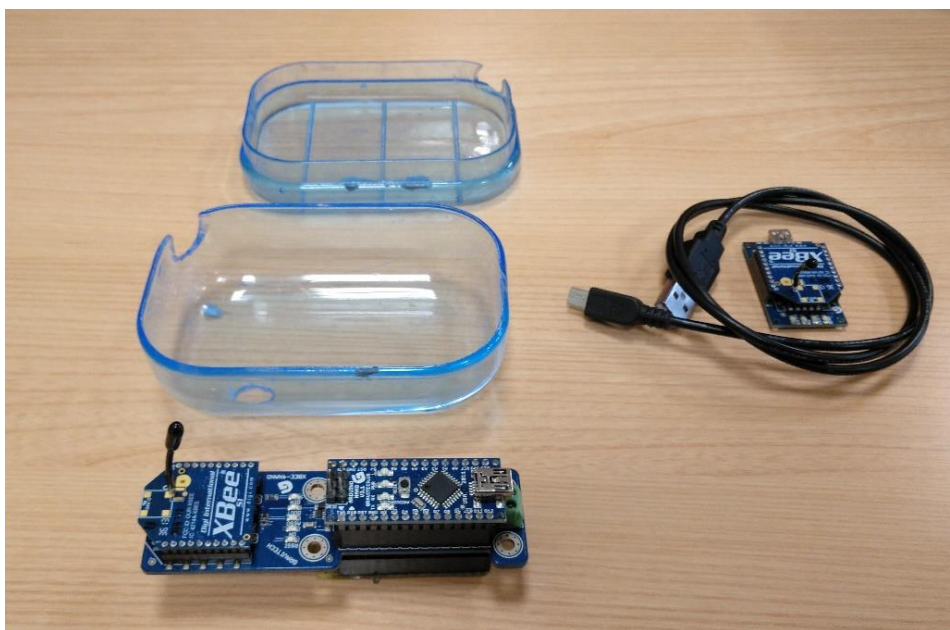


Figura 6: Arduino (izq) módulo receptor (dcha) y caja protectora.

- Caja: Para proteger aún más el arduino del impacto que sufre en el momento de la caída, además de para darle robustez al sistema, y poder conectarlo al paracaídas, se escogió una pequeña caja de cartón. En ella se introdujo la caja protectora del arduino mediante la colocación de papel de burbuja en su interior. Además, para asegurarse una correcta apertura del paracaídas, se decidió añadirle peso a la caja mediante unos pequeños plomos en la base.
- Arnés: para poder unir la caja con las cuerdas del paracaídas, se realizó dos agujeros en la tapa de la caja por el que se unieron dos alambres con forma circular, de los cuales se pudo introducir las arandelas que unen las cuerdas del paracaídas con el arnés de la caja.



- Paracaídas: a la hora de fabricar la campana del paracaídas se utilizó la tela de un paraguas. Como se ha mencionado en la sección 2.2.3 quizás no fue la mejor opción en cuanto a términos de estabilidad se refiere, debido a la porosidad nula típica de los paraguas y de la forma redondeada de la campana. El motivo de esta elección es, en primer lugar, lo barato que supuso la fabricación del paracaídas, y en segundo lugar se pensó en generar cierta inestabilidad para que la recogida de datos sea más interesante. Las cuerdas se encuentran unidas al paracaídas mediante unas arandelas localizadas en cada una de las puntas de la tela, y unidas entre sí mediante un nudo, que conecta a su vez, con las arandelas por las que se unen a la caja.



**Figura 7: Paracaídas casero del experimento**

- Cámara: Para poder grabar el descenso en su totalidad, se usó la cámara de un Ipad que graba en HD y a 30 frames por segundo, para posteriormente poder analizar la trayectoria del descenso con mayor detenimiento. Además, el video juega un papel de gran importancia en el filtrado de datos, ya que gracias a la grabación se pudo determinar en qué instante comenzó el descenso y el despliegue total de la campana.



### 3.2 Lanzamiento

Para que el experimento sea posible, fue necesario realizar el lanzamiento en un lugar que tuviera altura y en el cual no se molestara a nadie, por ello se decidió lanzar desde la azotea del edificio 1 (hacia su patio interior) del campus de Leganés de la Universidad Carlos III de Madrid. Esta localización permitió una amplia visión de la caída, unas excelentes condiciones para la grabación, y un espacio abierto para una correcta conexión entre el arduino y el ordenador. Además, al ser un patio cerrado, no había tránsito de personas, y por lo tanto no se molestó a nadie.

El día que se decidió realizar el lanzamiento fue el día 1 de junio de 2018. Aunque la temperatura no es un factor a tener en cuenta (hacía mucho calor), sí que lo es el viento, ya que puede afectar en la trayectoria del descenso, pero al estar en un patio cerrado, no existía prácticamente viento en su interior. Quizás, al lanzar desde una cornisa sí que existía ciertas ráfagas ascendentes al estar más expuestos, pero de poca intensidad y prácticamente despreciables.

La secuencia de lanzamiento fue en el siguiente orden:

1. Se comenzó la grabación desde el suelo del patio.
2. Se conectó la pila del arduino para encenderlo.
3. Se observó en el ordenador si la calibración previa y la conexión con el arduino es correcta.
4. Una vez finaliza la calibración y los primeros datos son recibidos en el ordenador, se introdujo y se fijó (mediante una cinta adhesiva para evitar movimientos que provoquen datos erróneos) todo el módulo a la caja azul protectora. Por último, se cerró la caja protectora con cuidado evitando hacer movimientos bruscos.
5. Se introdujo la caja azul con el módulo, en la caja de cartón protegida con papel de burbuja en su interior, que ya tiene conectada a ella el paracaídas.
6. Se cerró y se selló con cinta adhesiva la caja de cartón para evitar que el módulo salga durante el descenso.
7. Después, se cogió el paracaídas desde su parte superior, y se observó si las cuerdas se encontraban enredadas entre sí.
8. Con todas las comprobaciones previas realizadas, se cogió de nuevo desde su parte superior y se dejó la caja colgando desde la cornisa, para que a la cuenta de 3 se produjera la suelta del paracaídas lo más lejos posible de la pared, para tratar de evitar el contacto durante el descenso.
9. Una vez aterrizó la carga y el paracaídas, se desconectó el módulo receptor del ordenador para interrumpir el flujo de datos, se detuvo la grabación y por último se desconectó la pila de alimentación del arduino.

De esta manera, se realizó un total de tres lanzamientos con el fin de obtener la mayor cantidad de datos, y tener la posibilidad de escoger el lanzamiento que mejor haya salido.

### 3.3 Obtención de datos

Como se ha mencionado con anterioridad, los datos generados en el arduino llegaban en tiempo real al ordenador mediante el módulo de radio. De esta manera se han obtenido una gran cantidad de datos.

El programa que contiene el arduino, permite gran variedad de modificaciones, entre las que destaca establecer el tipo de datos que se desea obtener, o el tiempo de envío de datos, es decir, cada cuanto es necesario enviar un paquete de datos. De esta manera, se ha podido aprovechar todos los módulos que posee el arduino:

- El módulo del acelerómetro suministra las aceleraciones lineales en los tres ejes coordenados.
- El módulo del giróscopo aporta las velocidades angulares de los tres ejes coordenados.
- Para medir el campo magnético en los tres ejes se utilizó el módulo correspondiente.
- Adicionalmente, y de manera informativa, el arduino posee un termómetro para medir la temperatura a la que está funcionando la electrónica.

El contador de tiempo del arduino cuenta en microsegundos, es por esta razón por la que se ha decidido que el rango de envío de datos se hiciese cada 1000 microsegundos aproximadamente, debido a que se ha presupuesto que pueden existir datos corruptos (dañados) que habría que desechar, y un tiempo corto de envío puede generar un volumen de datos lo suficientemente grande como para suplir los datos erróneos.

Time	Wx	Wy	Wz	T(Cº)	Ax	Ay	Az	Fx	Fy	Fz
4764	0.07	0	0.07	32.09	-0.07	-0.09	-0.98	-344.65	192.63	259.08
12932	0.14	-0.07	-0.07	31.74	-0.1	-0.1	-1	-344.65	192.63	259.08
23024	-0.21	0.21	-0.14	32.14	-0.11	-0.09	-1.01	-344.65	192.63	259.08
35444	0.21	0.07	-0.07	31.74	-0.08	-0.1	-1.01	-344.65	192.63	259.08
47648	0	-0.07	0.28	31.74	-0.09	-0.09	-0.95	-342.53	191.64	259.08
59864	-0.07	-0.07	0	32.03	-0.09	-0.1	-1	-342.53	191.64	259.08
72264	0.21	0	0	31.8	-0.08	-0.12	-0.99	-342.53	191.64	259.08
84332	0	0	0.14	31.57	-0.09	-0.1	-0.98	-342.53	191.64	259.08
96432	0.07	0	0.07	31.63	-0.08	-0.09	-0.98	-342.53	191.64	259.08
108480	0	0	0.07	32.14	-0.09	-0.09	-0.98	-344.65	189.66	259.08
120788	0.07	-0.07	0.14	31.8	-0.1	-0.08	-0.99	-344.65	189.66	259.08
133136	0	0.07	0.28	32.14	-0.08	-0.09	-0.96	-344.65	189.66	259.08
145392	-0.14	0.21	0	31.74	-0.1	-0.07	-0.98	-344.65	189.66	259.08
157852	-0.07	0.28	0.14	31.86	-0.09	-0.12	-0.97	-344.65	189.66	259.08
170256	-0.21	0.14	-0.07	32.26	-0.1	-0.12	-0.99	-342.53	189.66	259.08
182828	-0.21	-0.21	0.35	32.14	-0.07	-0.1	-0.98	-342.53	189.66	259.08
195344	0	0	-0.07	31.8	-0.07	-0.09	-1.03	-342.53	189.66	259.08
207828	0.14	-0.21	0.07	31.74	-0.07	-0.09	-1	-342.53	189.66	259.08
220160	0	0	0.07	31.63	-0.08	-0.07	-1	-342.53	189.66	259.08
232476	0.07	-0.14	-0.07	32.03	-0.09	-0.09	-0.98	-342.53	189.66	259.08
244988	0	0	0.07	31.57	-0.05	-0.09	-1.01	-345.72	191.64	257.03

Figura 8: Porción de datos suministrada por el arduino

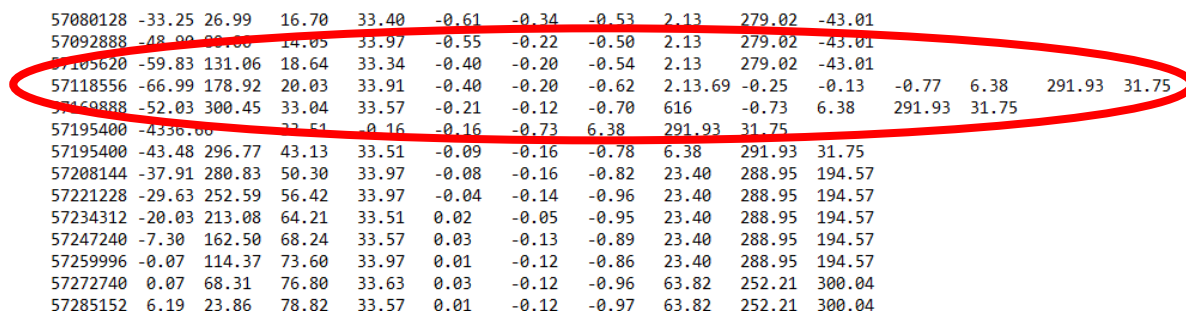
Como se puede observar en la figura 8, el flujo de datos es continuo, y se divide en 11 columnas que significan:

Número de columna	Dato	Unidades
1	Tiempo	$\mu\text{s}$
2	Velocidad de rotación en x (Wx)	Grados/s
3	Velocidad de rotación en y (Wy)	Grados/s
4	Velocidad de rotación en z (Wz)	Grados/s
5	Temperatura	$^{\circ}\text{C}$
6	Aceleración lineal en x (Ax)	$\text{m/s}^2$
7	Aceleración lineal en y (Ay)	$\text{m/s}^2$
8	Aceleración lineal en z (Az)	$\text{m/s}^2$
9	Campo magnético en x	-
10	Campo magnético en y	-
11	Campo magnético en z	-

Tabla 2: Significado y unidades de los datos

Como se ha mencionado con anterioridad, existe la posibilidad de que, en algunos momentos del descenso, se produjeran datos erróneos o corruptos, las causas de este problema pueden ser:

- alguna soldadura en mal estado que conecta el arduino con alguno de los medidores, pudo hacer que se interrumpiera la conexión en algún momento, y que cuando se produjera la reconexión, enviara información errónea.
- Al realizar algún movimiento brusco se pudo interrumpir la conexión con el arduino.
- Aunque menos probable, se pudo haber dado el caso de que los datos recogidos hubieran superado el umbral de medición de alguno de los módulos y enviara información errónea.



57080128	-33.25	26.99	16.70	33.40	-0.61	-0.34	-0.53	2.13	279.02	-43.01
57092888	-48.00	89.00	14.05	33.97	-0.55	-0.22	-0.50	2.13	279.02	-43.01
57105620	-59.83	131.06	18.64	33.34	-0.40	-0.20	-0.54	2.13	279.02	-43.01
57118556	-66.99	178.92	20.03	33.91	-0.40	-0.20	-0.62	2.13.69	-0.25	-0.13
57159888	-52.03	300.45	33.04	33.57	-0.21	-0.12	-0.70	616	-0.73	6.38
57195400	-43.48	296.77	43.13	33.51	-0.09	-0.16	-0.78	6.38	291.93	31.75
57208144	-37.91	280.83	50.30	33.97	-0.08	-0.16	-0.82	23.40	288.95	194.57
57221228	-29.63	252.59	56.42	33.97	-0.04	-0.14	-0.96	23.40	288.95	194.57
57234312	-20.03	213.08	64.21	33.51	0.02	-0.05	-0.95	23.40	288.95	194.57
57247240	-7.30	162.50	68.24	33.57	0.03	-0.13	-0.89	23.40	288.95	194.57
57259996	-0.07	114.37	73.60	33.97	0.01	-0.12	-0.86	23.40	288.95	194.57
57272740	0.07	68.31	76.80	33.63	0.03	-0.12	-0.96	63.82	252.21	300.04
57285152	6.19	23.86	78.82	33.57	0.01	-0.12	-0.97	63.82	252.21	300.04

Figura 9: Ejemplo de datos corruptos

### 3.4 Filtrado de datos

Debido al gran volumen de datos que se maneja en este experimento, es necesario realizar un filtrado de los datos obtenidos en los tres lanzamientos. Las causas principales por el que se hace este filtrado son:

- Eliminar todos los datos corruptos que se han podido generar durante el descenso, para evitar errores en los cálculos.
- Eliminar los datos que no tengan interés para el experimento, como por ejemplo, los datos recogidos durante la fase de preparación de la caja, donde el arduino ya estaba funcionando, pero aún no había comenzado el descenso (ver sección 3.2).
- Tratar de obtener, mediante un estudio rápido de los datos, el momento de la suelta del sistema y el momento del aterrizaje para saber con exactitud los datos con los que se debe trabajar.

Para realizar el filtrado de datos, se usará el software de Excel que permite una eliminación y un graficado rápido de los datos.

#### 3.4.1 Eliminación de datos corruptos

En primer lugar, es necesario eliminar los datos corruptos. Para ello se han observado y borrado todas las líneas que tuvieran más o menos columnas de las preestablecidas inicialmente (11), como se muestra en la figura 9. Gracias a que se ha establecido un tiempo de envío de datos muy corto, hay datos suficientes como para que prácticamente no se notara la ausencia de unos pocos datos eliminados. Sin embargo, también existe la posibilidad de que haya filas de datos con 11 columnas, que a primera vista pueden ser correctos, pero que en realidad sean erróneos. Una manera de conocer la veracidad de estos datos, es graficar la temperatura medida por el arduino, ya que se ha observado que sigue una clara tendencia, por tanto, si alguna línea de datos se sale de esta tendencia se considera errónea. Como se puede observar a continuación, existe un conjunto de datos que se sale claramente de la tendencia impuesta por la temperatura.

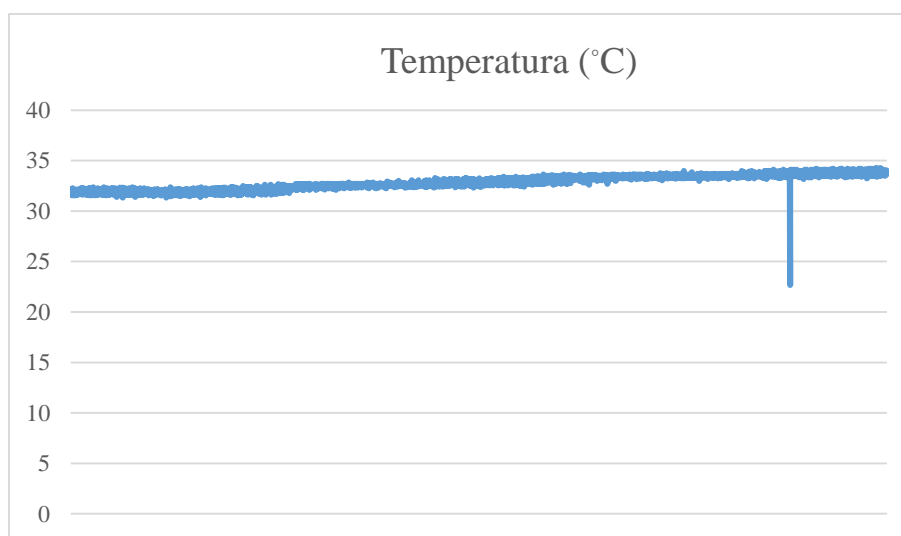


Figura 10: Gráfica de la temperatura en el lanzamiento 3

### 3.4.2 Concatenación de la caída

Una vez se sabe que todos los datos que se tienen son correctos y que no existe ninguno erróneo, es necesario conocer el momento de la suelta y el momento del aterrizaje, puesto que suponen los datos verdaderamente interesantes para los cálculos de la trayectoria. Por tanto, en primer lugar, se ha decidido graficar los datos de cada parámetro que se ha medido (aceleraciones, rotaciones y campos magnéticos) por si existe algún indicio que nos indique el comienzo o el final del descenso.

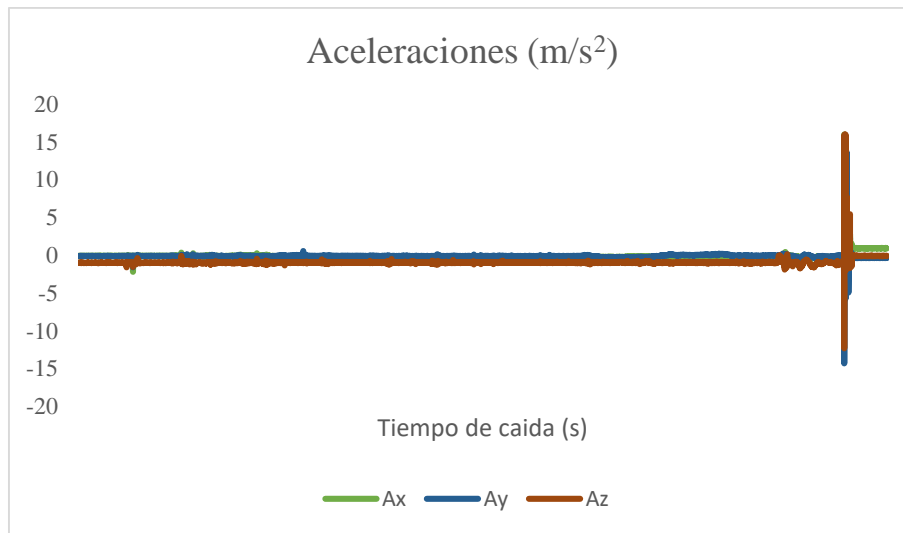


Figura 11: Gráfica de las aceleraciones del lanzamiento 3

Como se puede observar en la gráfica anterior, existe una gran perturbación en los datos recogidos de la aceleración lineal. Sabiendo que un impacto de un objeto cayendo a cierta velocidad desde una altura considerable provoca un gran número de g en un breve periodo de tiempo, sumado a que la localización de esta perturbación se encuentra prácticamente al final del registro de los datos, se puede concluir que esta disparidad coincide con el momento del aterrizaje/impacto de la caja.

Una vez se conoce el momento exacto donde concluye la trayectoria, falta conocer el momento inicial del descenso. De esta manera se podría proceder a eliminar el resto de datos innecesarios correspondientes a los tiempos de preparación del experimento. Para esta tarea, es necesario realizar un análisis de las grabaciones realizadas de cada uno de los descensos (en el Anexo A se encuentran los enlaces de las grabaciones), ya que en ellas podemos conocer el tiempo que dura la caída. De esta forma se puede “retroceder” en el tiempo sobre los datos recogidos. Más concretamente, si se resta el tiempo que dura el descenso al momento en el que impacta en el suelo, obtenemos el instante exacto en el que se produjo la suelta del paracaídas.

Gracias a un programa de edición de videos, se pudo contar con gran exactitud el número de frames por segundo que dura la caída, y sabiendo que la cámara del Ipad con la cual se ha realizado la grabación graba a 30 imágenes por segundo, se obtuvo un tiempo total de descenso de la siguiente manera:

$$T_{caída} = \frac{N^{\circ} \text{ de frames totales en la caída}}{N^{\circ} \text{ de frames que graba por segundo}} = \frac{206}{30} = 6.86 \text{ segundos}$$

De esta manera, restando 6,86 segundos al instante en el que la carga impacta con el suelo, se obtiene el momento en el que se produce la suelta del paracaídas. Es por esto, que se puede proceder a eliminar los datos sobrantes, de casi un minuto de datos grabados, solo son válidos, para la posterior realización de los cálculos, los 6.86 segundos que dura el descenso completo.

### 3.5 Análisis de resultados

Una vez se han filtrado los datos correctamente, es necesario escoger uno de los tres lanzamientos que se realizaron. Para ello, se va a realizar un estudio de cada uno de ellos para saber cuál posee el conjunto de datos más adecuado para los cálculos posteriores.

De nuevo, resulta una pieza fundamental la grabación, ya que se puede observar cuál de las tres trayectorias es la más limpia y digna de estudio. Además, también será necesario observar las gráficas de los datos obtenidos con la intención de comprobar si existe alguna anomalía.

#### 3.5.1 Lanzamiento uno

El primer lanzamiento de todos, fue el más exigente en cuanto a preparación se refiere, ya que era la primera vez que se preparaba el. Cuando se iba a realizar la suelta, las cuerdas se enredaron entre sí y se decidió detener el lanzamiento hasta que se colocaran adecuadamente, mientras tanto el arduino ya estaba funcionando y metido en la caja, por lo que no paraba de enviar datos. Es por esta razón que fue el lanzamiento con el que mayor volumen de datos se ha trabajado durante la etapa de filtrado.

Una vez todo estaba dispuesto para el lanzamiento, la cámara grabando y los datos llegando al ordenador correctamente, se produjo la suelta.

Al analizar el video del descenso, se puede observar claramente como a causa de la pendulación de la caja, o quizás por soltarlo demasiado cerca de la pared, el paracaídas y la carga impactan de forma brusca contra la pared a pocos metros de que se produzca el aterrizaje. Si se realiza una inspección de los datos, se puede observar como claramente en la gráfica de las aceleraciones se producen dos picos de g, el primero corresponde al impacto con la pared, y el segundo con el aterrizaje. Es necesario mencionar, que, aunque la elección del lanzamiento se debería decidir con los datos filtrados, es interesante observar la disparidad, y lo complejo que ha supuesto localizar el punto de impacto con el suelo.

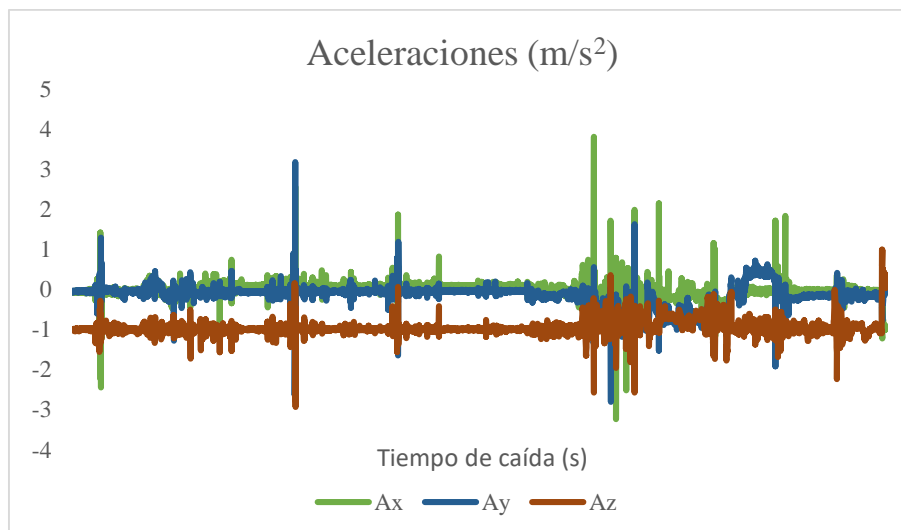


Figura 12: Gráfica de las aceleraciones sin filtrar del lanzamiento uno

Debido a los resultados tan complejos y difíciles de analizar de este lanzamiento, sumado al hecho de que no ha sido un descenso limpio por el impacto con la pared, se descarta la elección de este lanzamiento.

Es por esta razón que se decidió realizar más de un lanzamiento, puesto que se observó que resultaba difícil manipular el arduino en la fase de preparación a causa de la alta sensibilidad que mostraba, además de que, en el momento de la suelta, no debía existir corrientes de aire que provocaran una colisión con la pared. También se concluyó, que a la hora de soltar el paracaídas era necesario soltarlo lo más lejos posible de la pared para que cuando comenzara la pendulación, evitar que rotara hacia la pared.

### 3.5.2 Lanzamiento dos

Para el segundo lanzamiento, se han aplicado ciertas correcciones en la fase de preparación con respecto al primer lanzamiento:

- La conexión de alimentación de la pila se realizó ya en el interior de la caja, evitando así movimientos bruscos durante la colocación.
- Se esperó a que prácticamente no existirá ningún tipo de corriente de aire en la cornisa desde la que se produjo el lanzamiento.
- Se trató de lanzar el paracaídas lo más lejos posible de la pared para evitar así que volviera a impactar con ella.

A pesar de todas las modificaciones realizadas en la preparación del lanzamiento, no evitó que la caja golpeará de nuevo la pared del edificio. Algo bueno que se obtuvo de este segundo experimento fue unos resultados mucho más claros que en el caso anterior, por lo que el filtrado de los datos se pudo realizar sin problemas, y como se puede observar de nuevo en la gráfica de las aceleraciones, destaca el pico que denota el impacto con la pared y el segundo pico tras el aterrizaje.

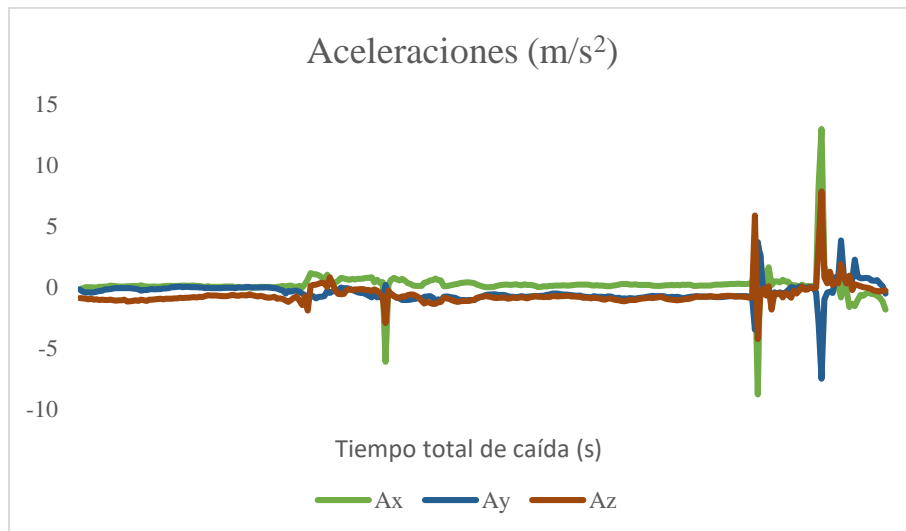


Figura 13: Gráfica de las aceleraciones en el lanzamiento dos ya filtrada

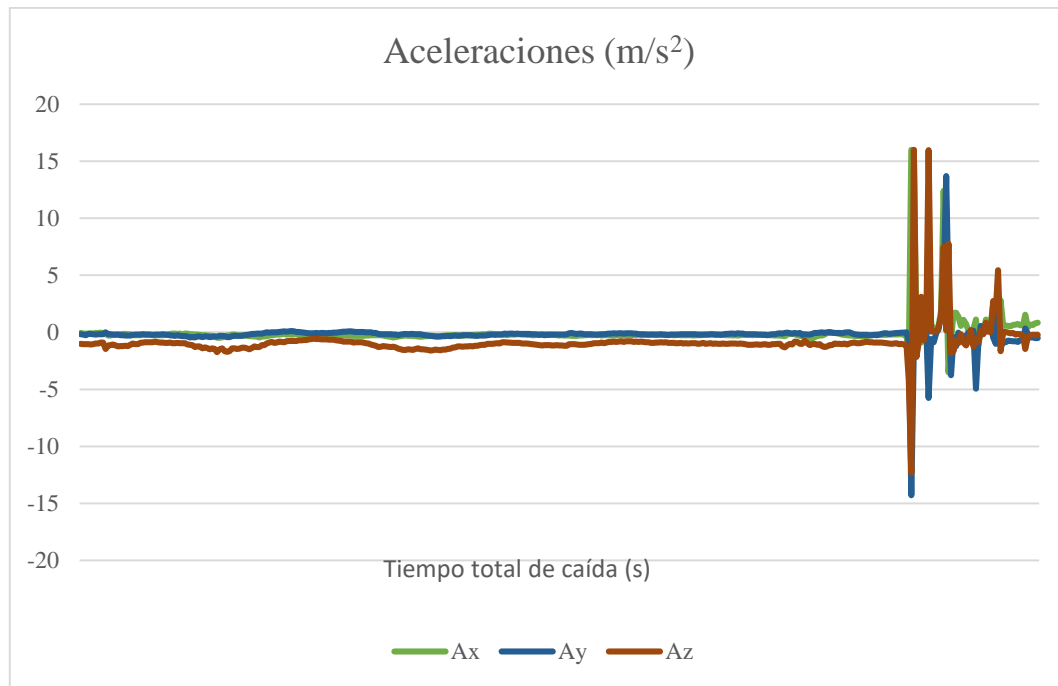
A pesar de haber obtenido unos datos que a simple vista parecen mejores, se ha decidido descartar este lanzamiento también, debido a un nuevo impacto en la pared. La razón principal de haber descartado este lanzamiento es porque al golpear en la pared, la trayectoria deja de ser limpia, debido a que ha aparecido un elemento que ha impedido que continuara con su trayectoria original, por lo que el estudio ya no sería totalmente veraz si se utilizara este lanzamiento o el anterior.

### 3.5.3 Lanzamiento tres

Para este lanzamiento se ha aplicado la misma metodología que para el segundo lanzamiento, con la intención de tratar de evitar la pared durante el descenso. En esta ocasión no existió contacto con la pared en ningún momento, además de que los datos salieron muy limpios de nuevo.

Es necesario mencionar que, durante la fase de filtrado de datos, apenas se tuvo que eliminar datos corruptos. Esto se puede deber a que se trató con más cuidado el arduino al cerrar la caja, y al no haber existido impacto con la pared se evitó cualquier fallo del sistema.





**Figura 14: Gráfica filtrada de las aceleraciones en el lanzamiento 3**

Como se puede observar en la gráfica anterior, existe únicamente una zona de impacto. Es ineludible mencionar que en la fase del aterrizaje no hay únicamente un único pico, sino que hay una serie de perturbaciones en un rango de tiempos muy pequeño, la causa de estas perturbaciones es que, a diferencia del resto de lanzamientos, el aterrizaje no fue limpio. En el momento en el que la caja se acercaba al suelo, el paracaídas se estaba desplazando lateralmente, lo que provocó que la caja se moviera de manera brusca en cuanto contactó con el suelo. Como consecuencia a este brusco movimiento, la caja rodó una pequeña distancia, lo cual se refleja en la gráfica anterior en forma de numerosos picos consecutivos.

Aunque en este caso el aterrizaje no haya sido perfecto, lo más importante es que no se ha producido contacto alguno con la pared, por lo que la trayectoria ha sido limpia en todo su descenso, y como el impacto con el suelo no afecta a la trayectoria en el aire, se ha decidido dar por válido este lanzamiento. Por tanto, los datos de este lanzamiento son los que se usarán para el post-procesado de los datos.

Una vez se ha estudiado las aceleraciones en busca de alguna anomalía, se busca en el resto de parámetros por si existiera algún tipo de fallo en los datos recogidos.

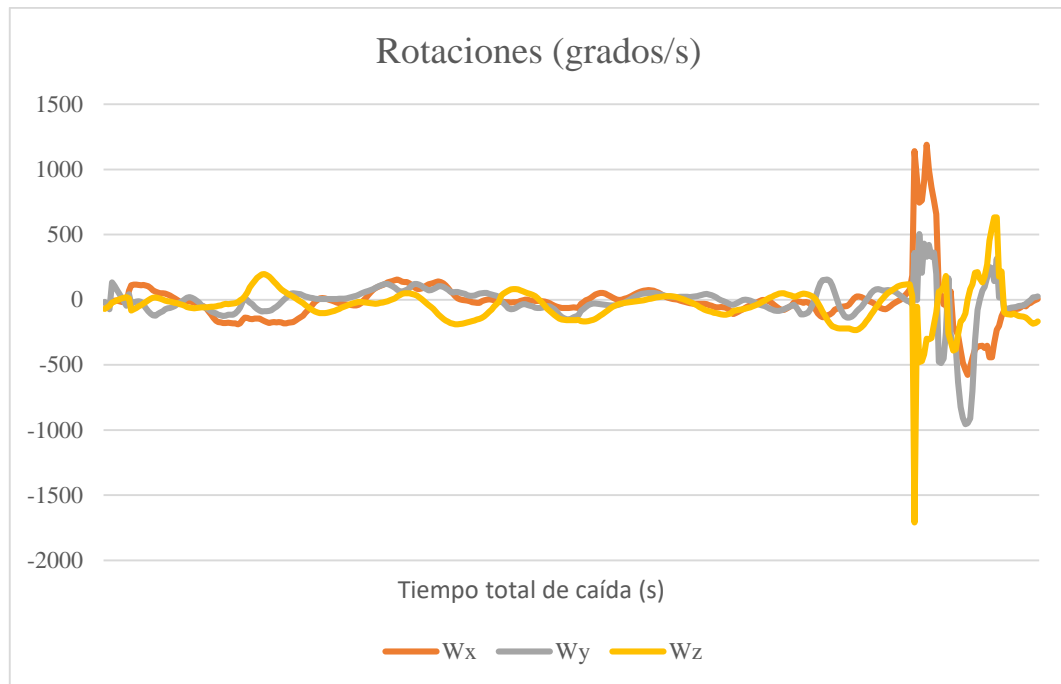


Figura 15: Gráfica de las velocidades de rotación filtradas en el lanzamiento 3

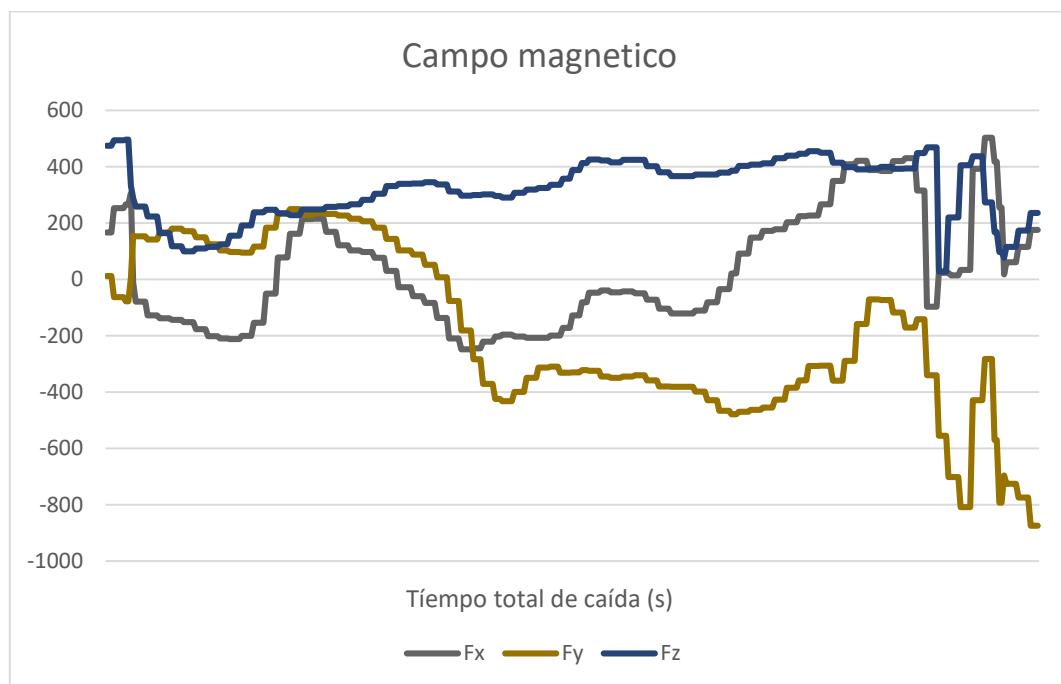


Figura 16: Gráfica del campo magnético filtrado en el lanzamiento 3

Lo único destacable en estas dos últimas gráficas, es la irregularidad que presenta la medición del campo magnético. Es muy posible, que los plomos que se colocaron en el interior de la caja o algún alambre del arnés o de las cuerdas, generaran perturbaciones en el campo magnético. Pero como estos datos, no son relevantes para el estudio de la trayectoria, se ha continuado con el post procesado de los datos.

## 4. CÁLCULO DE LA TRAYECTORIA Y PROCESADO DE DATOS

En este capítulo se va a proceder a calcular la trayectoria del sistema. Para ello se va a implementar un sistema de ecuaciones que represente la trayectoria en 2 dimensiones, después, y en base a este modelo, se va a generar un modelo teórico que represente el descenso en tres dimensiones y que integre los datos obtenidos en el experimento.

### 4.1 Consideraciones previas

Debido a la complejidad de las ecuaciones que se van a manejar, es necesario realizar alguna simplificación en el planteamiento previo del problema, con el fin de facilitar el modelo y reducir el tiempo de computación.

- Debido al pequeño tamaño de la caja, únicamente se va a tener en cuenta la actuación de su fuerza másicas (su peso) para los cálculos, y, por consiguiente, se despreciará por completo el efecto aerodinámico de la caja. En definitiva, las únicas fuerzas aerodinámicas que actúan en el sistema durante su descenso son las generadas por la campana del paracaídas.
- No se considera ningún vector de viento en el modelo. Es cierto que el viento puede provocar grandes variaciones tanto en la orientación como en la dirección que tomará el sistema durante el descenso, pero para poder comparar adecuadamente los resultados obtenidos en el experimento, con los hallados en el modelo teórico no se tendrá en cuenta el efecto del viento durante el descenso. Además, como se ha mencionado con anterioridad, el experimento se realizó en el patio interior de un edificio, y por esta razón, salvo una pequeña componente ascendente durante el momento de la suelta, el resto del descenso se realizó con el viento prácticamente nulo.
- Los cálculos se han realizado únicamente durante la fase de descenso estacionario (ver apartado 2.2.3). Esto se debe a que como se ha mencionado anteriormente, la fase de despliegue de la campana es tremendamente impredecible y de muy corta duración, por lo que prácticamente no afecta al transcurso de la trayectoria. En suma, el paracaídas en ningún momento estaba plegado durante la suelta, es decir, que estaba semidesplegado cuando comenzó el descenso, y por tanto el tiempo de caída libre es muy pequeño, al igual que el tiempo de despliegue de la campana.
- Quizás la simplificación más importante que se ha decidido tomar es la de considerar el sistema como un único sólido rígido [5] que se mueve en un campo fluido. Tras observar las grabaciones obtenidas del tercer lanzamiento, se pudo observar como la campana y la caja giraban como un único sólido, que las cuerdas estaban permanentemente tensas durante el descenso al completo, y que la campana del paracaídas permanecía totalmente desplegada hasta en el momento del aterrizaje. Por tanto, la definición esencial de un sólido rígido como un cuerpo en el que la distancia entre sus puntos permanece constante en todo instante de tiempo se cumple.

- A modo de simplificación, se va a considerar simetría en el tensor de inercia para mayor facilidad de los cálculos matemáticos. Es por esto que la inercia en X es igual a la inercia en Y

## 4.2 Cálculos y mediciones previas

Además de los datos medidos obtenidos por el arduino, es necesario conocer con mayor profundidad ciertos valores dimensionales y másicos, del experimento que se ha realizado, con el fin de introducirlos en las ecuaciones. Para ello, con la ayuda de una cinta métrica, y una pequeña báscula, se ha dimensionado y pesado la caja y el conjunto del paracaídas (cuerdas y campana) resultando:

Constante	Abreviatura	Valor	Unidades
Longitud de la caja	a	0.14	Metros
Ancho de la caja	b	0.102	Metros
Altura de la caja	c	0.095	Metros
Masa total de la caja	Mc	0.281	Kilogramos
Longitud de las cuerdas	L	0.635	Metros
Radio del paracaídas	R	0.7	Metros
Masa del paracaídas	Mp	0.075	Kilogramos

Tabla 3: Datos dimensionales y másicos del experimento

Una vez que se conocen las masas y dimensiones que rigen el problema, se puede proceder a calcular uno de los parámetros más importantes del sólido rígido, el centro de masas del sistema.

### 4.2.1 Cálculo del centro de masas sin masa aerodinámica

El cálculo sencillo del centro de masas, se puede simplificar como una barra (semejante a las cuerdas del paracaídas) que posee una masa diferente en cada uno de sus extremos. Es necesario mencionar que se puede considerar una barra rígida debido a que las cuerdas del paracaídas permanecen totalmente tensadas y estiradas durante el descenso.

A simple vista y sin hacer ningún cálculo, se puede observar como el centro de masas se va a localizar más cerca de la caja que del paracaídas, por tanto, para mayor entendimiento del problema, se ha decidido añadir dos constantes más con respecto a las mencionadas en la Tabla 3. Estas son:

- $l_c$ : distancia del centro de masas de la caja al centro de masas del sistema calculada en metros
- $l_p$ : es la distancia del centro de masas del paracaídas al centro de masas del sistema medida en metros.

Por tanto, se obtiene el siguiente esquema de fuerzas:

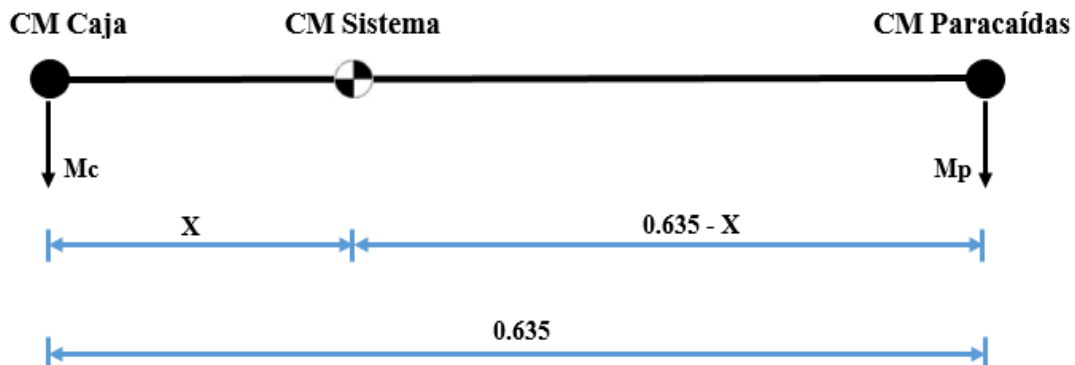


Figura 17: Esquema simplificado del centro de masas sin fuerzas inerciales

Para conocer la distancia  $X$  y por consiguiente obtener la localización del centro de masas del sistema al completo, se procede a realizar equilibrio de momentos en el centro de masas del sistema resultando:

$$M_c \cdot X = M_p \cdot (0.635 - X) \quad (4.1)$$

$$0.281 \cdot X = 0.075 \cdot (0.635 - X) \quad (4.2)$$

El resultado final de la localización del centro de masas es:

$$X = 0.133 \text{ m}$$

En definitiva, y como se predijo con anterioridad, el centro de masas se localiza a 13.3 centímetros del centro de masas de la caja (debido a la mayor masa de la caja con respecto al paracaídas). Es necesario mencionar, que para la realización del cálculo se ha incluido la masa de las cuerdas en el centro de masas del paracaídas, ya que es una masa muy pequeña en comparación con la masa de la caja y de la campana del paracaídas.

El resultado final de las nuevas constantes son:

Constante	Valor	Unidades
Distancia entre el centro de masas de la caja y el centro de masas del sistema ( $l_c$ )	0.133	Metros
Distancia entre el centro de masas del paracaídas y el centro de masas del sistema ( $l_p$ )	0.502	Metros

Tabla 4: Valores obtenidos para  $l_c$  y  $l_p$

#### 4.2.2 Cálculo del centro de masas con la masa aerodinámica

Para el cálculo realizado en el apartado anterior, únicamente se ha tenido en cuenta las masas reales del sistema, es decir, las masas físicas que intervienen en el problema. Pero la realidad es muy distinta, ya que, para hallar el verdadero centro de masas del sistema, (alrededor del cual gira el cuerpo) hay que considerar, en suma, las fuerzas inerciales. Esta fuerza permite que los momentos alrededor del centro de masas no se anulen y que por tanto exista pendulación en el sistema. La única fuerza inercial que aparece en el sistema es la provocada por la masa aerodinámica, que como se ha comentado en la sección 2.1.1 hace referencia al volumen de aire desplazado como consecuencia del movimiento del sistema.

Por tanto, el esquema y la posición del centro de masas resulta:

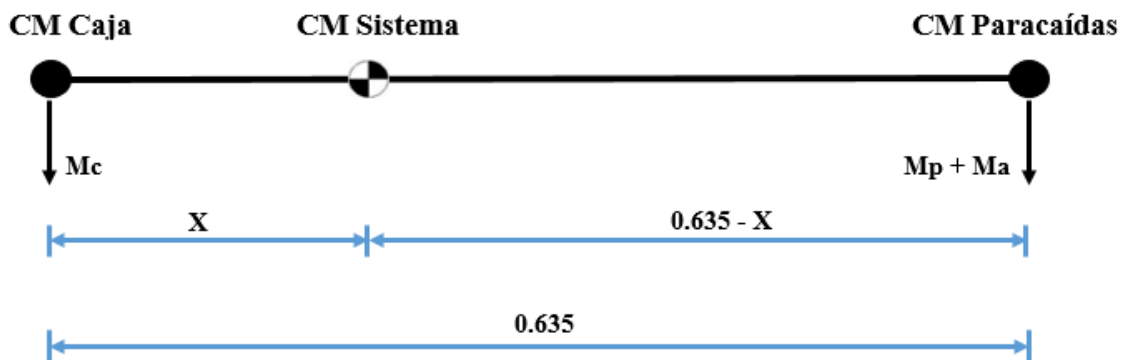


Figura 18: Esquema simplificado del centro de masas con fuerzas inerciales

Si se recuerda de la sección 2.1.1 cómo se calcula la masa aerodinámica se tiene:

$$M_a = 0.916\pi R^3 \rho \quad (2.1)$$

Que sustituyendo los valores expuestos en la tabla 3 se obtiene un valor para la masa aerodinámica de:

$$M_a = 1.268 \text{ kg}$$

Por tanto, la posición del centro de masas se puede calcular como en el apartado anterior resultando:

$$M_c \cdot X = (M_p + M_a) \cdot (0.635 - X) \quad (4.3)$$

$$0.281 \cdot X = (0.075 + 1.268) \cdot (0.635 - X) \quad (4.4)$$

Se obtiene:

$$X = 0.525 \text{ m}$$

Este resultado varía considerablemente con respecto al obtenido en el apartado 4.2.1 debido a la masa aerodinámica. De esta manera, al desestabilizar el equilibrio producido por las masas reales, existirá pendulación alrededor del nuevo centro de masas. De esta manera se obtienen los nuevos valores de  $L_c$  y  $L_p$ .

Constante	Valor	Unidades
Distancia entre el centro de masas de la caja y el centro de masas del sistema ( $l_c$ )	0.525	Metros
Distancia entre el centro de masas del paracaídas y el centro de masas del sistema ( $l_p$ )	0.110	Metros

Tabla 5: Valores finales de  $L_c$  y  $L_p$

### 4.3 Modelo de trayectoria en dos dimensiones

Este modelo matemático creado por R.G Hume [4] en febrero de 1973 para el *Aeronautical Research Council*, tiene como fin analizar en profundidad las diferentes características y cualidades de un sistema compuesto por una carga y un paracaídas durante la fase del descenso estacionario.

La base en la que se sustenta este modelo es la aproximación del sistema carga-paracaídas como un péndulo en movimiento, de ahí que las ecuaciones en las que se basa sean semejantes a las que se plantearía para un péndulo en dos dimensiones. Aunque Hume [4] contempla en sus ecuaciones una componente que simboliza la acción del viento, como se ha mencionado en el apartado 4.1, no se tendrá en cuenta este estudio a causa de la dificultad que entraña medir tanto el módulo, como la dirección y el sentido de los vientos. Por otra parte, excepto si existen ráfagas muy bruscas, el paracaídas se adaptará a la velocidad del viento, y se puede suponer que se calcula la trayectoria en un sistema de referencia arrastrado por el viento.

En suma a todo esto, las características que permite analizar el modelo según su autor son:

- La influencia de la masa de la caja para la estabilidad durante el descenso y la frecuencia de oscilación que puede alcanzar el sistema durante el descenso.
- La variación en la componente vertical de la velocidad como resultado de las oscilaciones.
- El guiado y las oscilaciones.

A pesar de tener unos objetivos tan claros, el caso que atañe a este estudio es únicamente el análisis de la trayectoria, (que ya de por sí implica un breve análisis intrínseco de estas propiedades) que seguirá el sistema en un descenso estacionario.

Para una correcta descripción del modelo, Hume [4] divide las ecuaciones que lo componen en dos grandes grupos:

- Una ecuación que describe el movimiento alrededor del centro de masas.
- Un conjunto de ecuaciones que describen el movimiento del propio centro de masas

Para ello, y a modo de guía, se ha utilizado el esquema de la figura 2, en el cual se describen las fuerzas actuantes, tanto aerodinámicas como másicas.

#### 4.3.1 Ecuación que describe el movimiento sobre el centro de masas

Para obtener esta ecuación que describe el efecto y el movimiento que generan las fuerzas sobre el centro de masas del sistema (conocida su posición gracias al cálculo realizado en el apartado 4.2.2) Hume [4] procede a tomar momentos, y a plantear la inercia del sistema, aplicando de esta manera el Teorema del momento cinético que tiene la forma:

$$I_{CM} \frac{d^2\theta}{dt^2} + M_c g l_c \sin(\theta) - M_p g l_p \sin(\theta) - F_N l_p = 0 \quad (4.5)$$

Donde:

- $I_{CM}$  hace referencia a la inercia del sistema completo.
- $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  al ser la segunda derivada temporal del ángulo teta, este término indica la aceleración angular en forma diferencial.
- $F_N$  hace referencia a la fuerza aerodinámica normal, perpendicular al eje que pasa por el centro de masas del sistema.
- $g$  es la aceleración de la gravedad con un valor de  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

Es interesante observar cómo define la inercia total del sistema, ya que se basa en introducir la masa aerodinámica, como se ha explicado en la sección 4.2.2:

$$I_{CM} = M_c L_c^2 + (M_p + M_a) L_p^2 \quad (4.6)$$

Donde se recuerda que  $M_a$  hace referencia a la masa aerodinámica, es decir, la masa aire que se ve acelerada tras el paso del paracaídas. Además, conociendo con exactitud la localización del centro de masas, y con el fin de simplificar los cálculos, se puede aplicar la siguiente correspondencia:

$$l_c = \frac{L M_c}{M_c + M_p + M_a} \quad (4.7)$$



$$l_p = \frac{L(M_p + M_a)}{M_c + M_p + M_a} \quad (4.8)$$

De esta manera, el momento de inercia se puede convertir en una expresión más sencilla que únicamente dependa de la longitud total de la cuerda, independientemente de donde se coloque el centro de masas.

$$I_{CM} = \frac{M_c L^2 (M_a + M_p)}{M_c + M_p + M_a} \quad (4.9)$$

A continuación, y para simplificar la ecuación 4.5, se ha considerado correcto dividir todo el conjunto entre  $I_{CM}$  para, de esta manera, eliminar los parámetros  $l_c$  y  $l_p$  reducir así la dificultad en la posterior computación.

Después, se va a proceder a simplificar los dos términos que corresponden a los momentos generados sobre el centro de masas, es decir, el término de fuerzas másicas y el de las fuerzas aerodinámicas

- Del tercer término de la ecuación 4.5, (Momento generado por la fuerza aerodinámica  $F_N$ ) se obtiene:

$$\frac{l_p}{I_{CM}}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes a  $l_c$  y a  $I_{CM}$

$$\frac{\frac{LM_c}{M_c + M_p + M_a}}{\frac{M_c L^2 (M_a + M_p)}{M_c + M_p + M_a}}$$

Simplificando se llega al término final

$$\frac{1}{(M_a + M_p)L}$$

- En cuanto a los términos de la ecuación que corresponden a los momentos generados por las masas, se tiene:

$$\frac{M_c g l_c \sin(\theta)}{I_{CM}} - \frac{M_p g l_p \sin(\theta)}{I_{CM}}$$

Si se saca factor común a la gravedad ( $g$ ) y el  $\sin(\theta)$ :

$$\left( \frac{M_c l_c - M_p l_p}{I_{CM}} \right) g \sin(\theta)$$

Se sustituyen los valores de  $L_c$  y  $L_p$  y se realiza la resta obteniéndose:

$$\left( \frac{M_c \frac{LM_a}{M_c + M_p + M_a}}{I_{CM}} \right) g \sin(\theta)$$

Aunque el término superior únicamente dependa de  $L$ , como era el objetivo principal, se puede continuar con la simplificación si se sustituye la expresión correspondiente a  $I_{CM}$  (Ecuación 4.9)

$$\left( \frac{M_c \frac{LM_a}{M_c + M_p + M_a}}{\frac{M_c L^2 (M_a + M_p)}{M_c + M_p + M_a}} \right) g \sin(\theta)$$

Se procede a simplificar la expresión anterior obteniéndose:

$$\left( \frac{M_a}{(M_a + M_p)L} \right) g \sin(\theta)$$

A continuación, y solo si se desea, se puede dividir el término entero entre  $M_a$ , con el fin de simplificar aún más el numerador, quedando el término final simplificado:

$$\left( \frac{1}{\left(1 + \frac{M_p}{M_a}\right)L} \right) g \sin(\theta)$$

De esta manera, tras haber simplificado la ecuación 4.5 que describe el movimiento del sistema sobre el centro de masas resulta una expresión más simple, dependiente de menos parámetros y con la que resulta más fácil trabajar.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{M_p}{M_a}\right)L} \right) g \sin(\theta) - \frac{F_N}{(M_a + M_p)L} = 0 \quad (4.10)$$

En último lugar, y como se ha definido en la sección 2.1.3, es interesante utilizar los denominados coeficientes adimensionales aerodinámicos con el fin de cambiar un parámetro desconocido, como son las fuerzas aerodinámicas  $F_N$  y  $F_A$ , a un coeficiente que se puede hallar mediante métodos experimentales o por aproximaciones bastante certeras. De esta manera, despejando las fuerzas de los respectivos coeficientes a partir de las ecuaciones 2.2 y 2.3 se obtiene:

$$F_n = C_N \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A \quad (4.11)$$

$$F_a = C_A \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A \quad (4.12)$$

Aplicando esta última transformación y despejando la fracción diferencial a un lado de la igualdad, se obtiene la ecuación final que formará parte del sistema de ecuaciones definitivo. Esta ecuación tiene la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{M_p}{M_a}\right)L} \right) g \sin(\theta) - C_N \left( \frac{\rho A}{(M_a + M_p)2L} \right) V^2 \quad (4.13)$$

#### 4.3.2 Ecuaciones que describen el movimiento del sistema

Una vez se han descrito los momentos que se generan alrededor del centro de masas del sistema, que, como consecuencia, producirán unas rotaciones sobre sí mismo, en esta sección se van a describir las expresiones matemáticas que permiten conocer el movimiento del centro de masas del sistema. Para ello, es necesario realizar un equilibrio de fuerzas en las dos componentes del espacio elegidas, ya que como se ha explicado con anterioridad, el modelo de Hume [4] es un modelo en 2 dimensiones, obteniéndose de esta manera una expresión que describe el movimiento en Y y otra que corresponde al movimiento en Z.

$$M' \frac{d^2z}{dt^2} = Mg - F_A \cos(\theta) + F_N \sin(\theta) \quad (4.14)$$

$$M' \frac{d^2y}{dt^2} = -F_A \sin(\theta) - F_N \cos(\theta) \quad (4.15)$$

Donde:

- $M'$  hace referencia a la suma de todas las masas existentes en el sistema, es decir:

$$M' = M_c + M_p + M_a$$

- $M$  es la suma de todas las masas reales (no ficticias) del sistema, sin tener en cuenta la masa aerodinámica, por tanto:

$$M = M_c + M_p$$

- $\frac{d^2z}{dt^2}$  y  $\frac{d^2y}{dt^2}$  indica las aceleraciones lineales en cada una de las direcciones del espacio, expresadas como la derivada segunda de la posición en cada instante de tiempo.
- $F_A$  es la fuerza aerodinámica de arrastre que resulta cuya dirección es coincidente al eje que pasa por el centro de masas.

Para dejar el término diferencial a un lado de la igualdad solo, se va a proceder a dividir ambos lados de la ecuación entre  $M'$ . Además, como ya se ha hecho en el punto 4.3.1, se ha sustituido los términos de las fuerzas aerodinámicas (ecuaciones 4.11 y 4.12) por su correspondencia en los coeficientes aerodinámicos adimensionales, resultando ambas ecuaciones finalmente transformadas como:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Mg}{M'} - C_A \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \cos(\theta) + C_N \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \sin(\theta) \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -C_A \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \sin(\theta) - C_N \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \cos(\theta) \quad (4.17)$$

### 4.3.3 Ecuaciones adicionales

Para terminar de cerrar el sistema, es necesario establecer una ecuación (en cada dirección del espacio) que describa el conjunto de velocidades que posee el problema [6]. Según la cinemática del sólido rígido la velocidad absoluta en el espacio es definida como la suma de la velocidad lineal relativa del cuerpo, más la componente correspondiente debida a la rotación del mismo, es decir:

$$v_{espacial} = v_{relativa} + w \cdot r \quad (4.18)$$

Si se aplica la definición anterior al problema planteado, se puede observar como el sistema posee una velocidad espacial que corresponde al flujo de aire que atraviesa el sólido rígido, una velocidad relativa que corresponde a la velocidad del sistema con respecto al flujo incidente y una rotación propia del sistema. Por tanto, la ecuación de la velocidad en cada una de las direcciones del espacio estudiada resulta, según la propuesta de Hume:

$$U_y = \frac{dy}{dt} - \left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \cos(\theta) - V_y \quad (4.19)$$

$$U_z = \frac{dz}{dt} + \left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \sin(\theta) - V_z \quad (4.20)$$

Donde:

- $\frac{dy}{dt}$  y  $\frac{dz}{dt}$  corresponden al término de la velocidad relativa del cuerpo con respecto al flujo que incidente en el sistema.
- $\left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \cos(\theta)$  y  $\left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \sin(\theta)$  hace referencia al término de rotación con respecto al centro de masas del sistema.
- $V_y$  y  $V_z$  son las velocidades del viento en cada una de las direcciones del espacio, que como se ha mencionado en la sección 4.1 estos valores son nulos.

Finalmente, queda establecer una relación entre los dos ángulos diferentes que componen el sistema. Se recuerda que existe el ángulo  $\theta$ , que hace referencia al ángulo que forman la vertical con el eje longitudinal que pasa por el centro de masas del sistema, y el ángulo  $\alpha$  conocido comúnmente como ángulo de ataque que describe el ángulo que se genera entre el flujo de aire incidente como consecuencia del movimiento de caída y el eje del sistema. Por tanto, Hume [4] plantea la relación siguiente:

$$\alpha + \theta = \tan^{-1} \left( \frac{U_z}{U_y} \right) \quad (4.21)$$

#### 4.3.4 Sistema completo final, resolución del sistema y condiciones iniciales

Una vez se conoce el significado de todas y cada una de las ecuaciones que componen el sistema, mediante su implementación y resolución en el software de Matlab, se va a obtener como resultado la trayectoria que debería haber seguido el sistema durante su descenso, además de la posición, orientación, velocidades lineales y velocidades de rotación en cada instante de tiempo. Por tanto, las ecuaciones finales que componen el sistema son:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{M_p}{M_a}\right)L} \right) g \sin(\theta) - C_N \left( \frac{\rho A}{(M_a + M_p)2L} \right) V^2 \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Mg}{M'} - C_T \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \cos(\theta) + C_N \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \sin(\theta) \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -C_T \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \sin(\theta) - C_N \left( \frac{\rho A}{2M'} \right) V^2 \cos(\theta) \quad (4.17)$$

$$U_y = \frac{dy}{dt} - \left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \cos(\theta) - V_y \quad (4.19)$$

$$U_z = \frac{dz}{dt} + \left( \frac{LM_c}{M'} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \sin(\theta) - V_z \quad (4.20)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{U_z}{U_y} \right) - \theta \quad (4.21)$$

El código resolutivo de Matlab, se compone principalmente de dos script:

- Un primer script donde se resuelve el sistema en sí (ya que en él se declara el solver).
- Un segundo script donde se declara la función que participa en la resolución del sistema.

El resto del código se va a incluir en el apéndice B de este documento, pero es necesario aclarar algunos parámetros del problema:

- El método resolutivo que se ha elegido para solucionar el sistema de ecuaciones es el solver ode45 [6] de Matlab, que como su propio nombre indica, es un parámetro que permite la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de una función que se declara previamente, junto con el tiempo de integración y las condiciones iniciales del problema. Es importante destacar que dentro de la función se encuentran todas las constantes y variables que rigen

el problema, es por ello que se ha decidido establecer el vector  $x$  con todas las variables y sus derivadas temporales, de manera que se tiene:

```

13 % x = [ the, dthe, z, dz, y, dy ]
14 % Llenar el vector x
15 the = x(1);
16 dthe = x(2);
17 z = x(3);
18 dz = x(4);
19 y = x(5);
20 dy = x(6);

```

Figura 19: Vector  $x$  con las variables del problema

- En cuanto al valor de los coeficientes aerodinámicos se refiere, Hume [4] introduce unas gráficas muy interesantes que permiten establecer un valor aproximado en función del ángulo de ataque que posea el sistema.

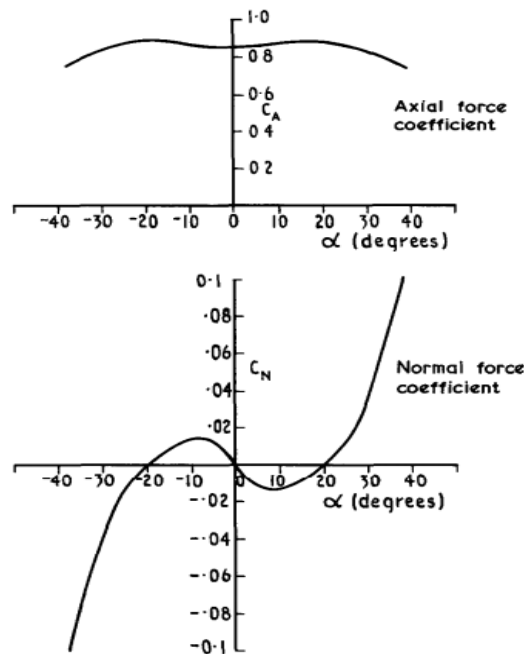


Figura 20: Gráficas de los coeficientes aerodinámicos frente al ángulo de ataque

Como se ha explicado en la sección 2.2.3, para los paracaídas con una campana circular convencional, la estabilidad durante el descenso llega para un ángulo de ataque típico de unos  $20^\circ$ . Es por esta razón, por la cual, basándose en la figura 20, se establecen unos valores de los coeficientes de 0.8 para el  $C_A$  y 0 para el  $C_N$ . No es de extrañar el valor nulo del coeficiente normal si se tiene en cuenta que para paracaídas redondos convencionales, apenas existe planeo, por lo que las fuerzas aerodinámicas normales tienden a ser nulas en este tipo de campanas (ver sección 2.1.3).

- En el caso de las condiciones iniciales, estas resultan muy simples, puesto que se considera que parte desde el origen de coordenadas preestablecido (azotea del edificio), y su orientación inicial es con un ángulo 0. Sin embargo, es necesario

establecer una velocidad de rotación inicial para que el sistema rote durante su descenso. Al igual que con las variables, se ha decidido llenar otro vector que especifique cada condición inicial respecto a su variable correspondiente.

```

39      % Condiciones iniciales
40      % x = [ the, dthe, z, dz, y, dy ]
41
42 -      x0 = [0, -0.1, 0, 0, 0, 0];

```

Figura 21: Vector x0 con las condiciones iniciales

- El tiempo total de integración se ha establecido de manera que coincida con el tiempo de caída medido en el experimento (ver sección 3.4.2), pasa que resulte más sencillo realizar una comparación.

#### 4.3.5 Resultados obtenidos

Para poder analizar los resultados aportados por la resolución del sistema de ecuaciones anteriormente evaluado y verificar el modelo con la trayectoria registrada en el video del experimento, se va a realizar un análisis de todas las variables del problema. Para ello, se van a graficar todos los parámetros dignos de estudio, separando las gráficas en distintos colores en función de la variable. Se ha utilizado el color verde para describir la orientación y la velocidad de rotación, el color azul para describir las velocidades lineales en cada una de las direcciones del espacio, y por último, el color rojo para determinar la posición del sistema en cada instante de tiempo.

- Orientación y velocidad de rotación

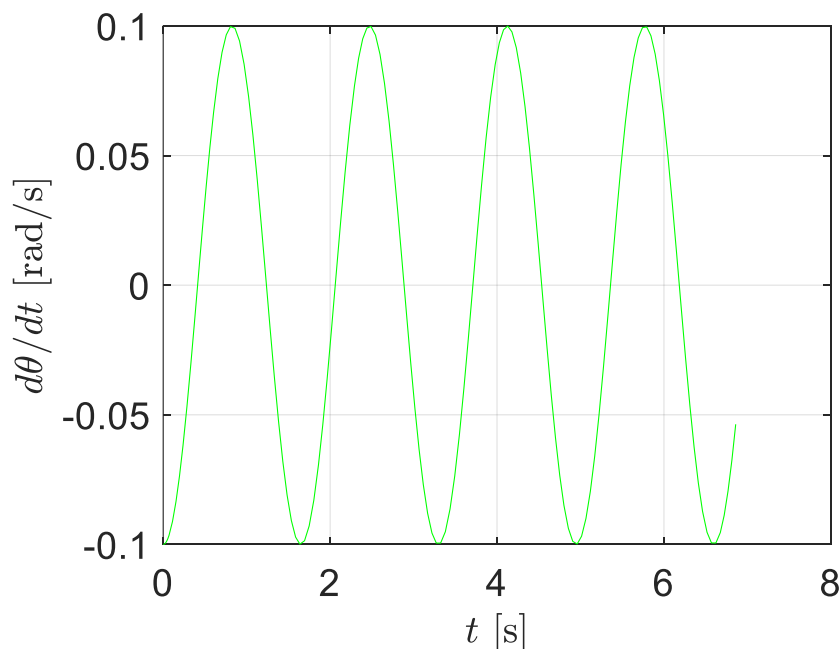


Figura 22: Gráfica de la velocidad de rotación

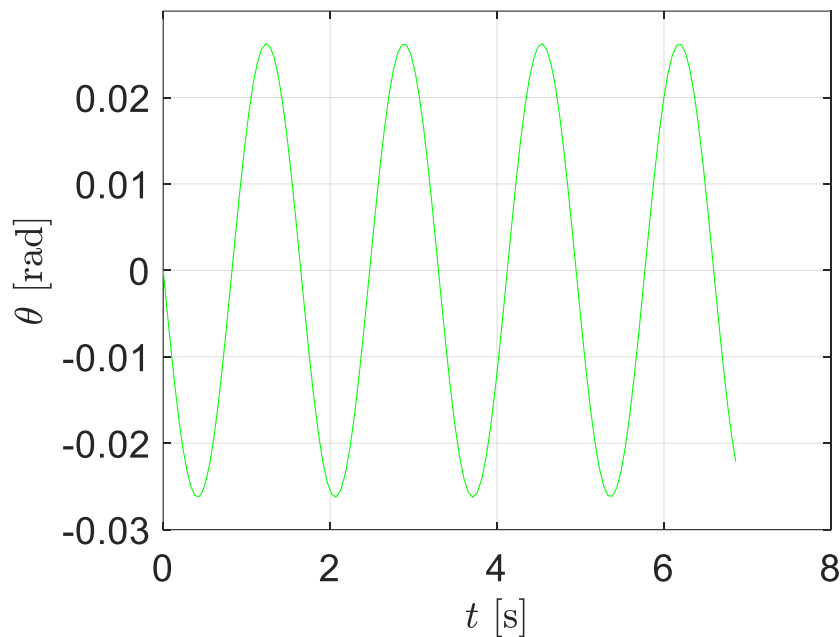


Figura 23: Gráfica de la orientación

Se puede observar el movimiento de naturaleza claramente oscilatoria del sistema. La pendulación ha sido generada por la condición inicial que se le ha suministrado al código de Matlab, de ahí que la gráfica correspondiente a la velocidad de rotación comience en el valor inicial aportado. En cuanto a la orientación  $\theta$  se refiere, posee un periodo de 1,8 segundos y una amplitud máxima del movimiento de 0,025 radianes. Esto nos indica, que cada 1,8 segundos, el sistema va a pendular durante su descenso con una amplitud de 0,025 radianes con respecto a su centro de masas. A simple vista puede parecer un valor pequeño de la pendulación, pero este valor está condicionado totalmente por el valor inicial de la velocidad de rotación.

#### - Velocidades lineales

Como consecuencia de la rotación que existe en el plano YZ (se recuerda que se trata de un modelo en dos dimensiones), la velocidad lineal en Y debe aparecer en forma de oscilación, sin embargo, la velocidad lineal en Z, al no existir ningún tipo de rotación sobre este plano, su velocidad debería ser una línea recta en la mayor parte del descenso. Por tanto, se comprueban los resultados:



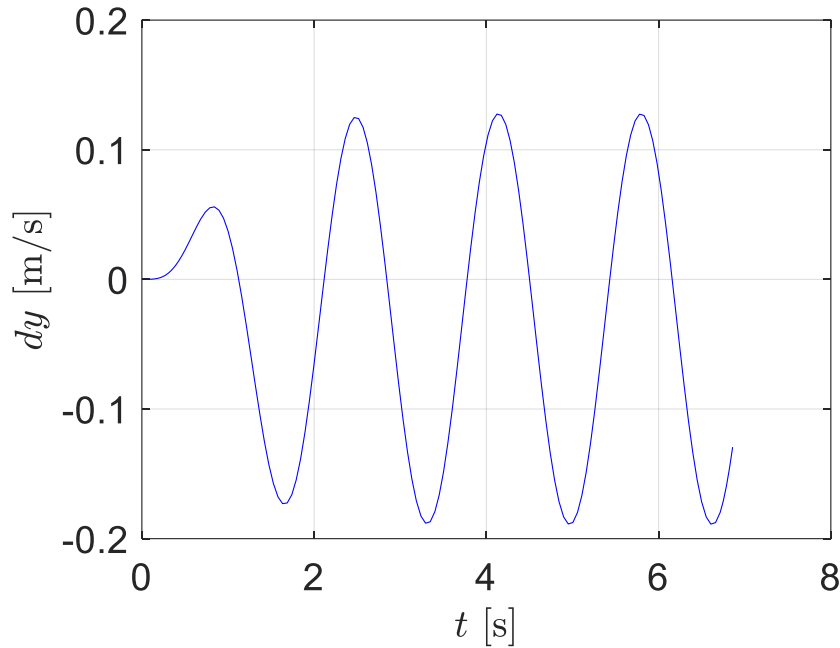


Figura 24: Gráfica de la velocidad lineal en Y

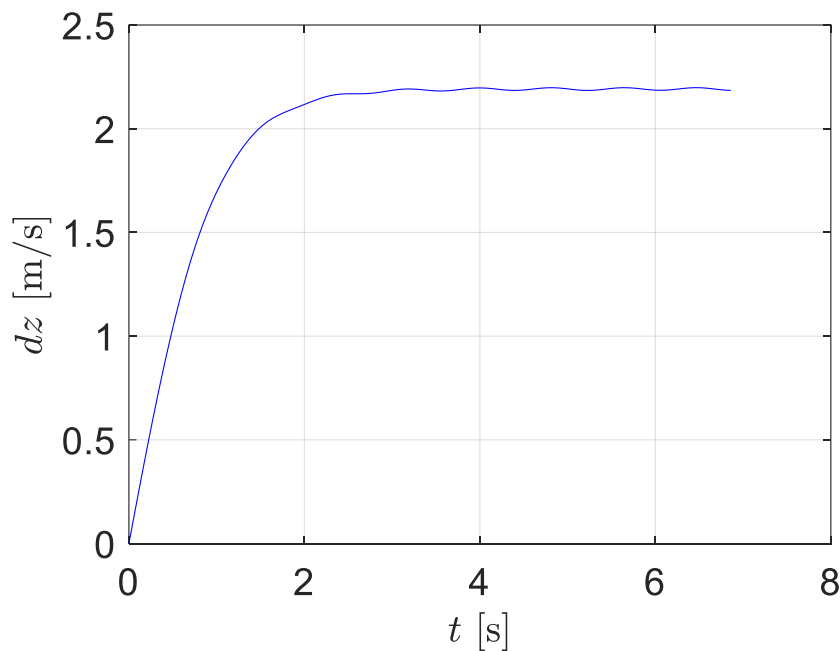


Figura 25: Gráfica velocidad lineal en Z

Como se puede observar en ambas figuras, existe un breve periodo de tiempo en el que la velocidad en ambos ejes coordenados es inestable en su comienzo. Se podría pensar que se puede deber a que el paracaídas no está del todo abierto inicialmente, pero como se ha comentado en la sección 4.1, las ecuaciones únicamente contemplan la fase del descenso estacionario. Este breve periodo, hace referencia a la fase en la cual el sistema alcanza su velocidad límite, es decir, la velocidad máxima que alcanza como consecuencia de los efectos aerodinámicos generados por el rozamiento con el aire. En ambos casos se puede observar como este periodo tiene una duración aproximada de dos

segundos y medio. En el caso de la velocidad en Y, la oscilación se estabiliza con una amplitud constante, mientras que en el caso de la gráfica en Z se estabiliza finalmente en una recta.

- Posición instantánea en el espacio

Para facilitar la comprensión de las gráficas se ha decidido dar valores negativos a los ejes coordenados para simular el descenso del experimento, de esta manera, se entiende que el origen de coordenadas absolutas se encuentra en la azotea del edificio desde el que se ha realizado el experimento. Por tanto, las gráficas que muestran la posición en cada instante de tiempo para ambos ejes son:

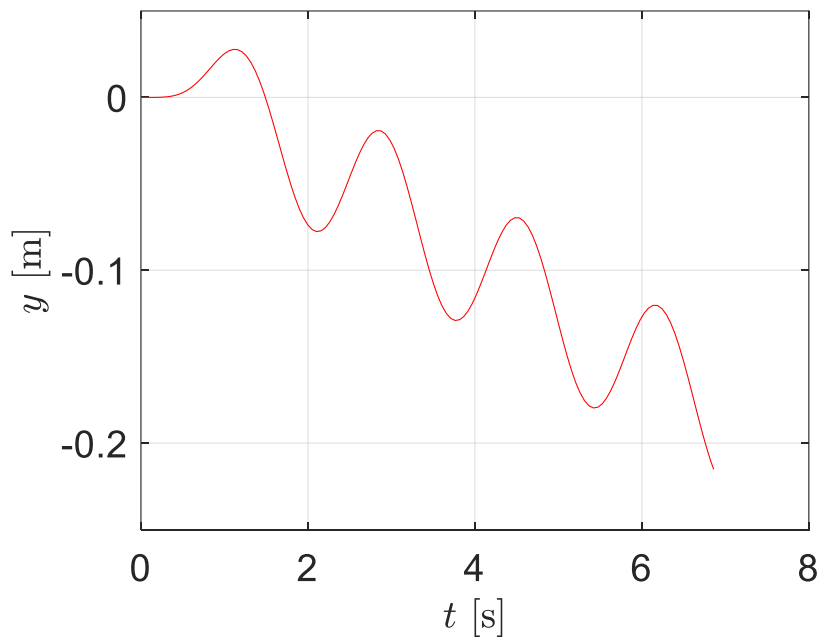


Figura 26: Gráfica de la posición instantánea en el eje Y

Al igual que en el caso de la velocidad, la posición en Y para cada instante de tiempo aparece representada como una oscilación. Es necesario mencionar que un factor clave es la condición inicial de velocidad de rotación que se le ha aportado al problema, ya que determina la amplitud de la oscilación que sufre el sistema durante su descenso.

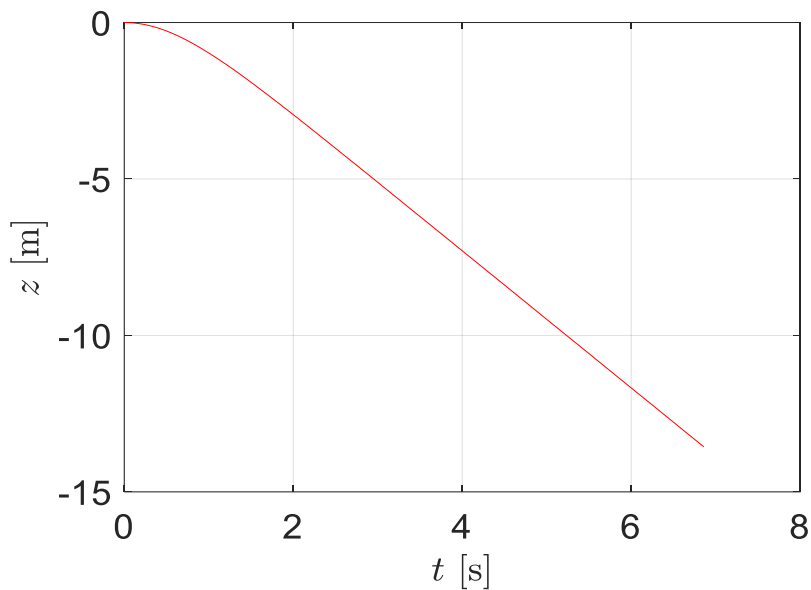


Figura 27: Gráfica de la posición instantánea en el eje Z

En el caso de la gráfica en Z, no existe oscilación alguna ya que únicamente rota sobre el plano YZ. Sin embargo, es interesante observar la distancia que recorre el sistema en el tiempo establecido para la integración del problema, puesto que coincide de manera muy aproximada con la altura del edificio desde el cual se realizó el experimento descrito en la sección 3. Este resultado nos indica, que ciertas constantes escogidas de manera aproximada, y que afectan en gran medida en el resultado del problema, han sido escogidas correctamente puesto que el resultado obtenido se asemeja al experimento realizado. Entre estas constantes destacan los coeficientes aerodinámicos ( $C_a$  y  $C_n$ ) principalmente, o el radio del paracaídas que ha resultado un parámetro difícil de medir.

A continuación, es interesante observar, la trayectoria final que va a seguir el sistema completo durante su descenso. Para ello se ha graficado la posición instantánea en Z frente a la posición instantánea de Y:

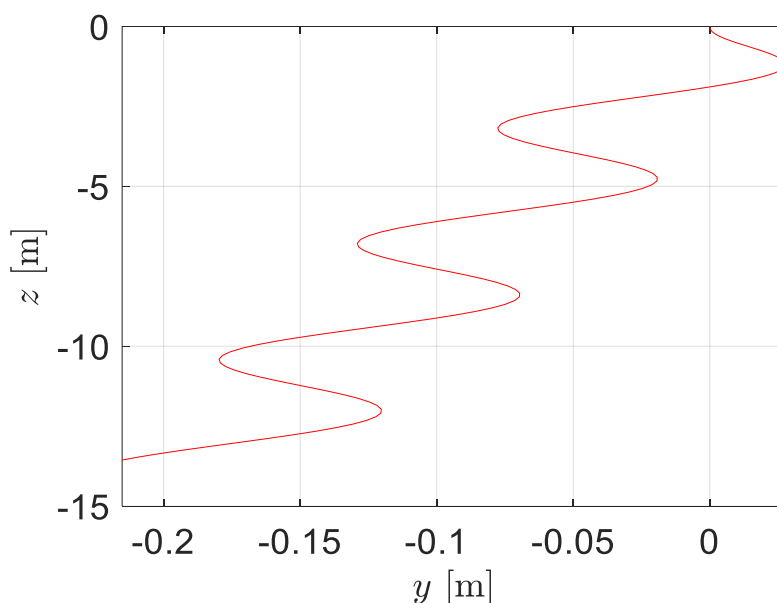


Figura 28: Gráfica de la trayectoria del sistema

Estos primeros resultados, al asemejarse con la trayectoria obtenida en el experimento, son indicativos de la validez del modelo. A continuación, se va a tratar de modificar las condiciones iniciales del problema para tratar de asemejarse aún más a las condiciones del experimento, para ello:

- Se va a dar un valor inicial a la velocidad lineal en el eje Z. Aunque la fase de apertura no se contempla en los cálculos, en el momento en el que el paracaídas está totalmente abierto y en pleno funcionamiento, ya lleva una velocidad inicial, adquirida principalmente en el breve instante de tiempo que dura la caída libre y en la fase de apertura.
- Se va a aumentar ligeramente el valor de la velocidad de rotación con el fin de observar qué consecuencias tiene sobre la pendulación del sistema.

Por tanto, tras imponer una velocidad en el eje Z de 3 m/s y una velocidad de rotación de unos -1.5 rad/s se obtienen los resultados:

- Velocidad de rotación y orientación

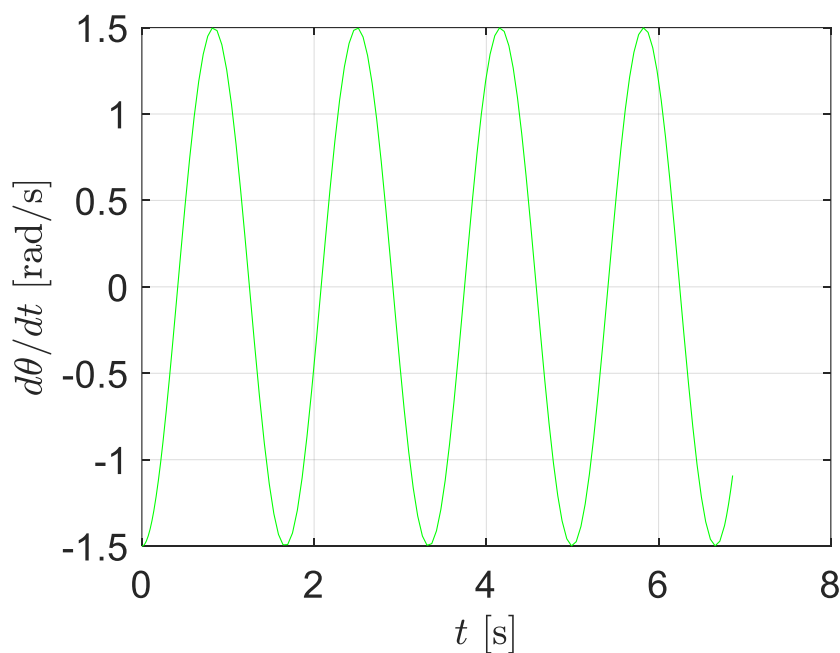
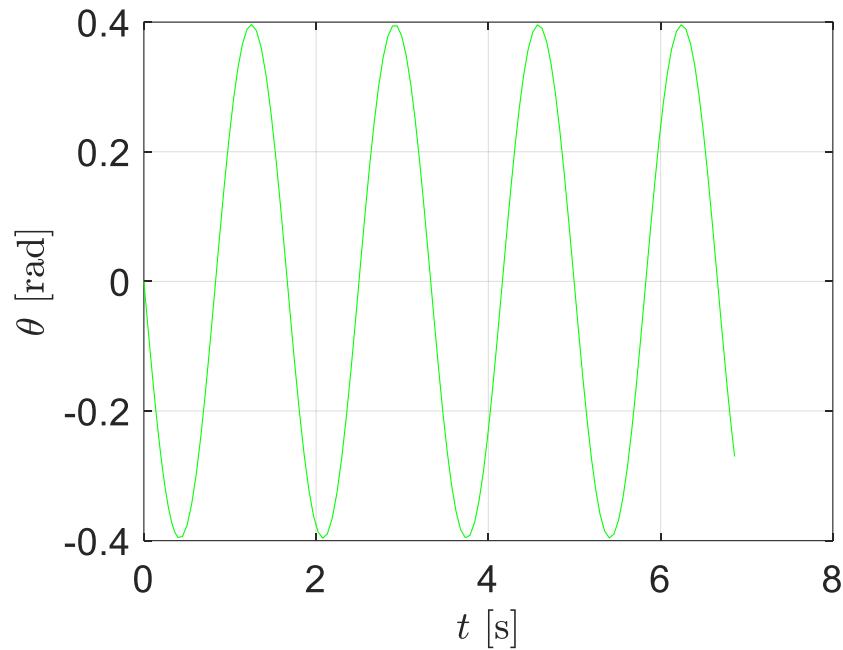
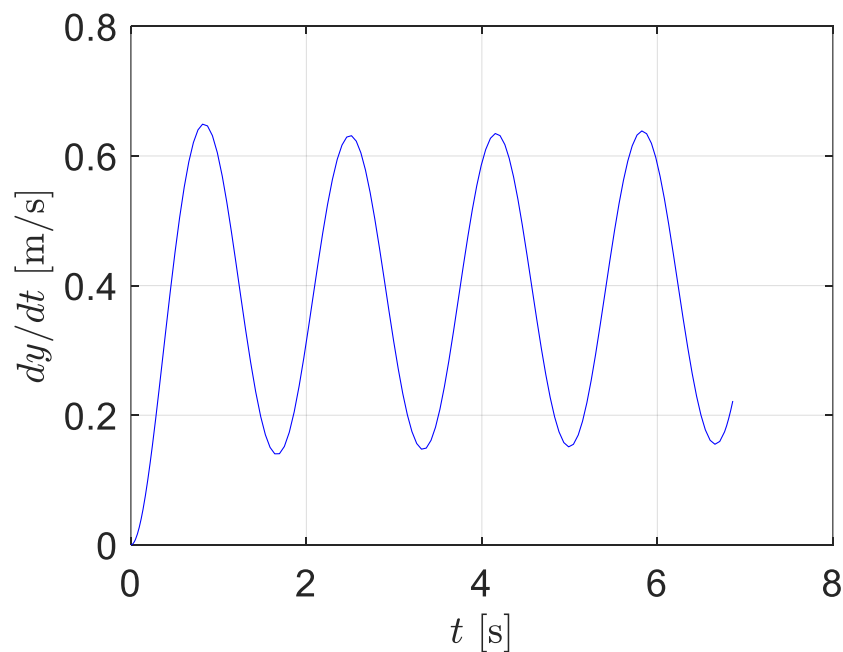


Figura 29: Gráfica de la velocidad de rotación (caso 2)

**Figura 30: Gráfica de la orientación (caso 2)**

En cuanto a la orientación y a la velocidad de rotación se refiere, la única variación destacable es la amplitud del movimiento armónico. Como se puede observar, ha aumentado considerablemente con respecto al caso inicial en ambas gráficas, por lo que este cambio está provocado únicamente por el hecho de haber aumentado la velocidad inicial de pendulación.

- Velocidades lineales

**Figura 31: Gráfica de la velocidad lineal en el eje Y (caso 2)**

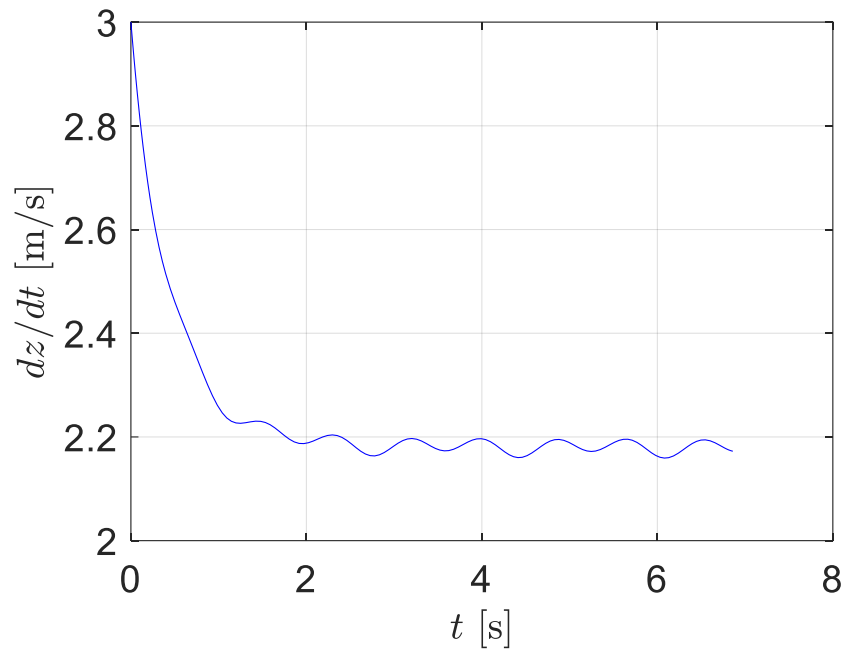


Figura 32: Gráfica de la velocidad lineal en Z (caso 2)

Como se puede observar ambas gráficas, la etapa de inestabilidad inicial se repite. El aspecto más importante a destacar, es la deceleración del sistema representado en la velocidad en Z. En el caso planteado inicialmente, el efecto era el inverso, es decir, al establecer una velocidad inicial nula, el sistema se aceleraba. Sin embargo, al imponer la velocidad inicial propia de la etapa de caída libre y apertura, el sistema se frena hacia un valor muy semejante al caso inicial.

- Posición instantánea en el espacio

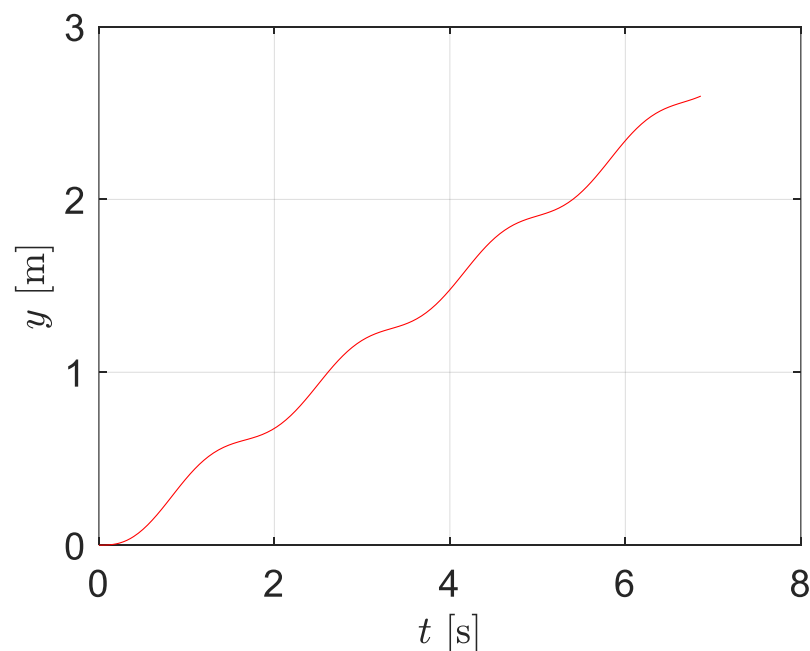


Figura 33: Gráfica de la posición instantánea de Y (caso 2)

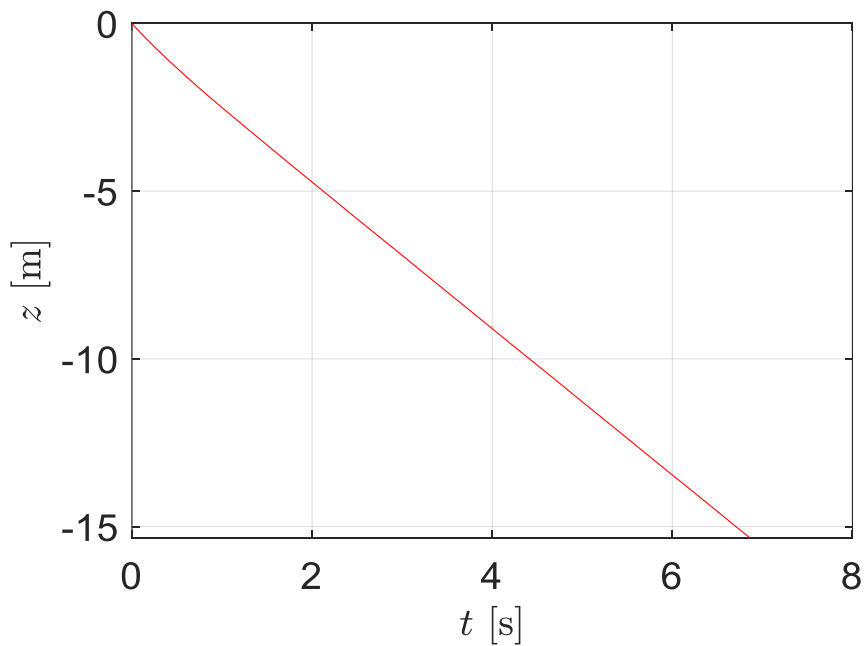


Figura 34: Gráfica de la posición instantánea de Z (caso 2)

En cuanto a la posición para cada instante de tiempo, es destacable el descenso en la amplitud de la pendulación de Y, además de que, en este caso, la posición en el eje Y toma valores positivos en vez de valores negativos como en el caso inicial. En suma a esto, la distancia recorrida en el eje Z con respecto al caso inicial ha aumentado un poco, y por tanto, se acerca aún más a la altura del edificio desde el que se realizó el lanzamiento. De nuevo, se puede concluir que todos estos cambios se deben a la variación en las condiciones iniciales del problema, por lo tanto, al acercarse aún más al experimento realizado, se concluye que estas condiciones se adecuan mejor al problema. Por último, se muestra la trayectoria total:

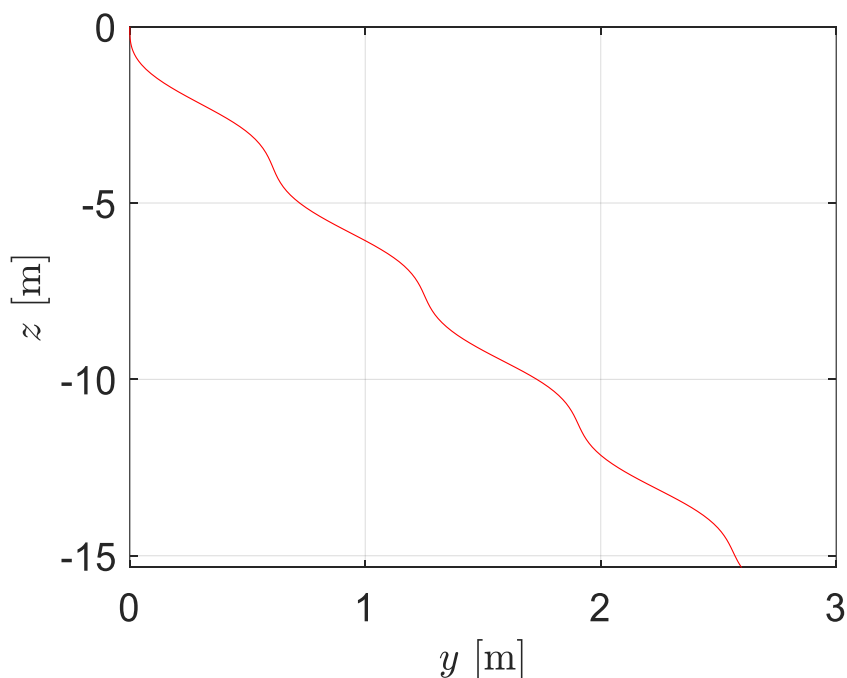


Figura 35: Gráfica de la trayectoria (caso 2)

#### 4.4 Modelo teórico de trayectoria en tres dimensiones

Para poder describir con total profundidad la trayectoria y las características cinemáticas y dinámicas que va tener el sistema en cada instante de tiempo, como consecuencia de un movimiento en un campo fluido, es necesario describir:

- Dinámica de las rotaciones: este estudio se realiza con el fin de conocer las causas que originan un cambio en la orientación del cuerpo para cada instante de tiempo.
- Cinemática de la rotación: se puede definir como el cambio de orientación que sufre el cuerpo en cada instante de tiempo.
- Cinemática de la traslación: se centra en el estudio del movimiento lineal de cualquier tipo sin necesidad de conocer las causas que lo provocan.
- Dinámica de la traslación: es el estudio del movimiento lineal desde el punto de vista de las fuerzas que lo causan.

Para poder describir cada uno de los apartados anteriores, se va a generar un sistema de ecuaciones diferenciales, que, basado en el modelo de Hume [4], sea capaz de representar la trayectoria completa en las tres dimensiones espaciales.

##### 4.4.1 Ejes del cuerpo y rotaciones

Para poder describir cualquier movimiento que sufra el sistema, es necesario establecer uno o varios sistemas de coordenadas. Se puede afirmar que por convenio y por la mayor facilidad resolutoria, los movimientos de rotación o pendulatorios se suelen expresar en ejes cuerpo,  $(\vec{e}_{x'''}, \vec{e}_{y'''}, \vec{e}_{z'''})$  al igual que las traslaciones en todas las direcciones del espacio se expresan en ejes absolutos  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

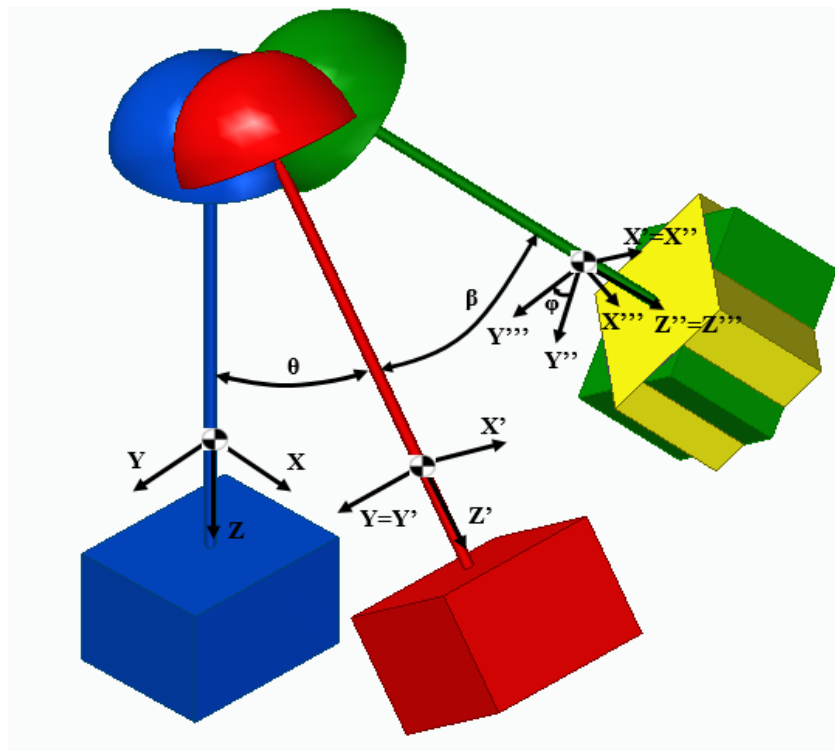


Figura 36: Esquema de las distintas rotaciones



Como se muestra la figura anterior, el sistema puede pendular en principio, alrededor de los tres ejes coordenados. Matemáticamente hablando, estas rotaciones se pueden expresar como una doble transformación ortogonal de los vectores absolutos  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$  en tres dimensiones [5].

Es necesario mencionar que tras observar el video del descenso número tres, sobre el que se va a centrar el estudio, el sistema apenas rotaba sobre el eje  $Z''$ , sin embargo, antes de despreciar cualquier posible movimiento, se ha decidido considerar inicialmente que también existe un pequeño movimiento de rotación sobre el eje  $Z''$ .

La primera pendulación o rotación que se produce es la descrita por el ángulo  $\theta$ , que rota alrededor del eje Y. En términos aeronáuticos esta rotación corresponde al movimiento denominado cabeceo o “pitch” en inglés (expresado como ejes prima en su forma matemática). Esta rotación se puede expresar con un sistema de ecuaciones que describe mediante la proyección de los vectores prima sobre ejes absolutos, tres ecuaciones espaciales. Este sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{x'} &= \cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_z \\ \vec{e}_{y'} &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_{z'} &= \sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_z\end{aligned}\tag{4.22}$$

Además, si se desea, se puede mostrar como un sistema matricial de ecuaciones resultando:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} \\ \vec{e}_{y'} \\ \vec{e}_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}\tag{4.23}$$

Se puede observar como la matriz que compone el sistema, cumple la función de matriz de rotación entre los ejes prima y los ejes absolutos. Además, otra propiedad de esta matriz a destacar como consecuencia de la primera transformación ortogonal [8], es su ortogonalidad, lo cual indica que la traspuesta de su matriz es igual a su inversa. Esto se puede observar porque una de las cualidades de este tipo de matrices es que su determinante resulta 1, por lo que se procede a comprobar.

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos(\theta)^2 - (-\sin(\theta)^2) = 1$$

Al igual que ocurre con la rotación alrededor del eje Y, la rotación que se produce sobre el eje  $X'$  (ángulo de pendulación  $\beta$ ), conocida como el movimiento de balanceo o “roll” en inglés, puede darse en forma de un sistema de ecuaciones estándar con la forma:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_{x''}} &= \overrightarrow{e_{x'}} \\
\overrightarrow{e_{y''}} &= \cos(\beta) \overrightarrow{e_{y'}} + \sin(\beta) \overrightarrow{e_{z'}} \\
\overrightarrow{e_{z''}} &= -\sin(\beta) \overrightarrow{e_{y'}} + \cos(\beta) \overrightarrow{e_{z'}}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

O también expresado en la forma matricial del sistema:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x''}} \\ \overrightarrow{e_{y''}} \\ \overrightarrow{e_{z''}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x'}} \\ \overrightarrow{e_{y'}} \\ \overrightarrow{e_{z'}} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Al igual que en el caso anterior, la propiedad de ortogonalidad se cumple, ya que el determinante de esta matriz de rotación entre ejes prima y ejes prima-prima resulta 1.

Por último, la rotación producida en el eje Z'' recibe el nombre de guiñada. Esta pendulación, al ser la última, va a establecer los ejes cuerpo del sistema ( $\overrightarrow{e_{x'''}}$ ,  $\overrightarrow{e_{y'''}}$ ,  $\overrightarrow{e_{z'''}}$ ), cuya proyección sobre ejes prima-prima resulta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_{x'''}} &= \cos(\varphi) \overrightarrow{e_{x''}} + \sin(\varphi) \overrightarrow{e_{y''}} \\
\overrightarrow{e_{y'''}} &= -\sin(\varphi) \overrightarrow{e_{x''}} + \cos(\varphi) \overrightarrow{e_{y''}} \\
\overrightarrow{e_{z'''}} &= \overrightarrow{e_{z''}}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Que expresado en forma de matriz ortogonal:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x'''}} \\ \overrightarrow{e_{y'''}} \\ \overrightarrow{e_{z'''}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x''}} \\ \overrightarrow{e_{y''}} \\ \overrightarrow{e_{z''}} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Por tanto, se puede concluir que se obtienen tres matrices de rotación claramente definidas, la matriz de cambio de ejes prima a ejes absolutos, la rotación de ejes prima-prima a ejes prima y de ejes cuerpo a ejes prima-prima. Es necesario mencionar, que gracias a la propiedad de ortogonalidad, la traspuesta de cualquiera de estas matrices resulta igual a la matriz inversa, lo que significa, que, al realizar únicamente la traspuesta de cualquiera de las matrices, se obtiene la rotación inversa. De esta manera se obtiene 6 rotaciones posibles:

$$\begin{aligned}
\text{Rotación de } \theta &\rightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x'}} \\ \overrightarrow{e_{y'}} \\ \overrightarrow{e_{z'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_z} \end{bmatrix} \\
\text{Rotación de } \theta \text{ inversa} &\rightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x'}} \\ \overrightarrow{e_{y'}} \\ \overrightarrow{e_{z'}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Rotación de } \beta \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} \\ \vec{e}_{y'''} \\ \vec{e}_{z'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{x''} \\ \vec{e}_{y''} \\ \vec{e}_{z''} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotación de } \beta \text{ inversa} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_{x''} \\ \vec{e}_{y''} \\ \vec{e}_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} \\ \vec{e}_{y'''} \\ \vec{e}_{z'''} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotación de } \varphi \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_{x''''} \\ \vec{e}_{y''''} \\ \vec{e}_{z''''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} \\ \vec{e}_{y'''} \\ \vec{e}_{z'''} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotación de } \varphi \text{ inversa} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} \\ \vec{e}_{y'''} \\ \vec{e}_{z'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{x''''} \\ \vec{e}_{y''''} \\ \vec{e}_{z''''} \end{bmatrix}$$

En suma a estas seis rotaciones, existen dos matrices más de cambio de coordenadas, que expresan la rotación directa entre ejes cuerpo y ejes absolutos. Esta rotación es de gran utilidad cuando se quiere expresar la traslación en ejes absolutos y la rotación en ejes cuerpo, como es el caso de estudio, ya que existen fuerzas en ambos sistemas de referencia, y por lo tanto es necesario rotarlos. Para llegar a estas dos nuevas matrices es necesario realizar una multiplicación entre las matrices de rotación que ya se han obtenido, de esta manera se declaran las siguientes matrices:

- Rotación de ejes cuerpo a ejes prima-prima: Matriz  $\varphi$
- Rotación de ejes prima-prima a ejes prima: Matriz  $\beta$
- Rotación de ejes prima a ejes absolutos: Matriz  $\theta$

Por tanto, mediante el producto de estas matrices, se va a obtener una cuarta matriz que describe la rotación directa entre los ejes cuerpo y los ejes absolutos.

$$M_{\varphi\beta\theta}^1 = M_{\varphi}M_{\beta}M_{\theta} \quad (4.28)$$

Si se expresa como un sistema matricial, al igual que el resto de las rotaciones anteriormente descritas se obtiene la transformación:

$$\text{Rotación de } \vec{e}_{''''} \text{ a } \vec{e} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_{x''''} \\ \vec{e}_{y''''} \\ \vec{e}_{z''''} \end{bmatrix} = [M_{\varphi\beta\theta}] \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Al haber realizado el producto de tres matrices ortogonales, la matriz resultante de la operación conservará las mismas propiedades de ortogonalidad, es decir, que, si se desea, al realizar la traspuesta de la matriz  $M_{\varphi\beta\theta}$  se obtiene la rotación inversa a la descrita en la

<sup>1</sup> La matriz  $M_{\varphi\beta\theta}$  se adjunta en el anexo D

expresión 4.29. Se obtiene de esta manera la matriz de rotación entre ejes absolutos y ejes cuerpo, con la forma:

$$\text{Rotación de } \vec{e} \text{ a } \vec{e}_{''' } \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = [M_{\varphi\beta\theta}^T]^2 \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} \\ \vec{e}_{y'''} \\ \vec{e}_{z'''} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

#### 4.4.2 Dinámica de la rotación

Para describir con total seguridad la dinámica de rotación que experimenta el sólido rígido estudiado, se ha decidido recurrir al teorema del momento cinético [6]. La definición de este teorema denota que la resultante de momentos es igual a la derivada temporal del momento cinético, expresado matemáticamente como:

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M} \quad (4.31)$$

Si consideramos que los ejes se encuentran fijos en el cuerpo, la ecuación anterior se puede utilizar para obtener las derivadas con respecto a ejes cuerpo de la manera:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_e = \left(\frac{dL}{dt}\right)_e + \omega \times L \quad (4.32)$$

Donde el subíndice e hace referencia a los ejes “cuerpo”. De esta manera se puede observar como la derivada del momento cinético es igual a su misma variación temporal más una componente de rotación. Por tanto, sustituyendo en la ecuación 4.31 y eliminando los subíndices de cuerpo, ya que se conoce que se va a trabajar en ejes cuerpo, se llega a la ecuación:

$$\frac{dL}{dt} + \omega \times L = \vec{M} \quad (4.33)$$

Ahora bien, si se plantea un sistema ejes cuerpo no inercial, se considera entonces que la inercia del cuerpo en estudio es constante en todo momento, y por lo tanto se puede llegar a la transformación:

$$L = I\omega \quad (4.34)$$

Donde la inercia I se expresa mediante un tensor la inercia del cuerpo durante el descenso del mismo. Si se sustituye esta última transformación en el teorema del momento cinético resulta la ecuación principal de estudio:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} + \omega \times (I\omega) = \vec{M} \quad (4.35)$$

<sup>2</sup> La matriz  $M_{\varphi\beta\theta}^T$  se adjunta en el anexo D

A continuación, se va a proceder a explicar cada uno de los componentes que forman los términos de la ecuación 4.35:

- Vector de velocidad de rotación  $\omega$ : se define la velocidad de rotación como la rapidez con la que se es capaz de cambiar de orientación. En este estudio, con el fin de facilitar la escritura matemática del problema, se ha decidido expresar la velocidad angular como un vector que muestra cada variación de la orientación en las 3 direcciones del espacio de la siguiente manera.

$$\omega = p\overrightarrow{e_{x'''}} + q\overrightarrow{e_{y'''}} + r\overrightarrow{e_{z'''}} \quad (4.36)$$

Donde:

- $p, q$  y  $r$  son las componentes de cada una de las velocidades de rotación en cada una de las direcciones del espacio para cada instante de tiempo. Los valores numéricos correspondientes a estas tres letras son los obtenidos en el experimento realizado, es decir, los datos de  $\omega$  obtenidos gracias al módulo giroscópico del arduino, en el lanzamiento 3. (ver sección 3.3 y 3.5.3).

Por tanto, gracias a las componentes  $p, q$  y  $r$  se consigue incluir los datos obtenidos en el experimento dentro del problema. Otra manera de expresar la velocidad de rotación espacial, y que resultará fundamental para describir la cinemática de rotación en apartados siguientes es:

$$\omega = \dot{\theta}\overrightarrow{e_y} + \dot{\beta}\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{\phi}\overrightarrow{e_{z''}} \quad (4.37)$$

De esta manera, se puede expresar la variación temporal de la orientación en función de los distintos ángulos que componen el sistema estudiado y de cada uno de los ejes sobre los cuales el sólido rota. Esta última expresión resulta de gran utilidad puesto que se trata de un conjunto de variables fundamentales a la hora de estudiar la dinámica y la cinemática rotacional de un cuerpo, por lo tanto, será una parte vital del sistema de ecuaciones diferenciales final.

- Tensor de inercia  $I$ : como todo movimiento giroscópico en 3 dimensiones, la inercia rotacional del sistema estudiado se puede expresar en forma de tensor simétrico en las tres direcciones del espacio [6], de la forma:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & I_y & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Donde:

- $I$  hace referencia a cada una de las inercias del cuerpo en cada uno de los ejes principales.

- $P$  hace referencia a los productos de inercia que indica la inercia del cuerpo con respecto a más de un eje coordenado.

De esta manera, al ser un sólido compuesto por ejes de simetría, el tensor de inercia expresado anteriormente queda reducido a:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Finalmente, queda obtener el valor de la inercia en cada uno de los ejes coordenados. Para ello se ha de realizar algunas suposiciones previas:

- El tensor de inercia se expresará en todo momento en ejes cuerpo.
- Se va a suponer un sistema simétrico con el fin de facilitar los cálculos de manera considerable, en términos matemáticos se puede expresar como:

$$I_x = I_y \quad (4.40)$$

A continuación, y a causa de que las masas del sistema están desplazadas del centro de masas del sistema, es necesario aplicar el teorema de Steiner para obtener la inercia en X e Y.

$$I_x = I_y = I_{gcaja} + M_c l_c^2 + I_{gparacaídas} + (M_p + M_a) l_p^2 \quad (4.41)$$

Donde:

- $I_{gcaja}$  hace referencia a la inercia de la caja, expresada como:

$$I_{gcaja} = \frac{M_c(a^2 + b^2 + c^2)}{12} \quad (4.42)$$

- $a, b$  y  $c$  hacen referencia a las dimensiones de la caja estudiada (Tabla 3)
- $M_c$  es la masa de la caja y de todo lo que contiene en su interior (Tabla 3)
- $I_{gparacaídas}$  hace referencia a la inercia del paracaídas calculada como si de una semiesfera se tratase.

$$I_{gparacaídas} = \frac{2}{5} (M_p + M_a) R^2 \quad (4.43)$$

- $M_p$  y  $M_a$  hacen referencia a la masa del paracaídas y a la masa aerodinámica respectivamente
- $R$  es el radio del paracaídas

- $l_c$  y  $l_p$  establecen la distancia entre el centro de masas del sistema y el centro de masas de la caja y del paracaídas respectivamente (sección 4.2.2)

Nótese la inclusión de la masa aerodinámica en los cálculos inerciales, puesto que, a pesar de ser una masa ficticia, supone un parámetro a tener en cuenta sobre la inercia del sistema.

En cuanto al cálculo de la componente del tensor en Z, al ser un eje coincidente con el eje de simetría del sistema, no es necesario aplicar el teorema de Steiner. Por lo tanto, la inercia en Z se compone únicamente de la suma de las inercias de cada una de las masas que componen el sistema, resultando:

$$I_z = I_{gcaja} + I_{gparacaídas} \quad (4.44)$$

Finalmente, el tensor total de la inercia para cada eje coordenado resulta:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Cuyos resultados analíticos según los datos dimensionales y másicos expresados en la tabla 3 y 4:

$$I_{gcaja} = \frac{M_c(a^2 + b^2 + c^2)}{12} = 9.139 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{gparacaídas} = \frac{2}{5}(M_p + M_a)R^2 = 3.438 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_x = I_y = I_{gcaja} + M_c l_c^2 + I_{gparacaídas} + (M_p + M_a)l_p^2 = 4.438 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = I_{gcaja} + I_{gparacaídas} = 3.447 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Finalmente, resulta el tensor de inercia con los valores analíticos:

$$I = \begin{pmatrix} 4.438 & 0 & 0 \\ 0 & 4.438 & 0 \\ 0 & 0 & 3.447 \end{pmatrix} \cdot 10^{-1} \text{ kgm}^2 \quad (4.46)$$

- Momentos M: como se ha mencionado antes, en el estudio dinámico de la rotación, es necesario conocer las causas que provocan el cambio de orientación en el espacio, para ello, es necesario tomar momentos alrededor del centro de masas del sistema. Debido a que el sistema rota en las tres direcciones espaciales, es necesario tomar momentos en cada una de las posibles orientaciones y ángulos. En primer lugar, se van a tomar momentos con la rotación sobre el eje Y cuyo ángulo protagonista, es el ángulo  $\theta$ .

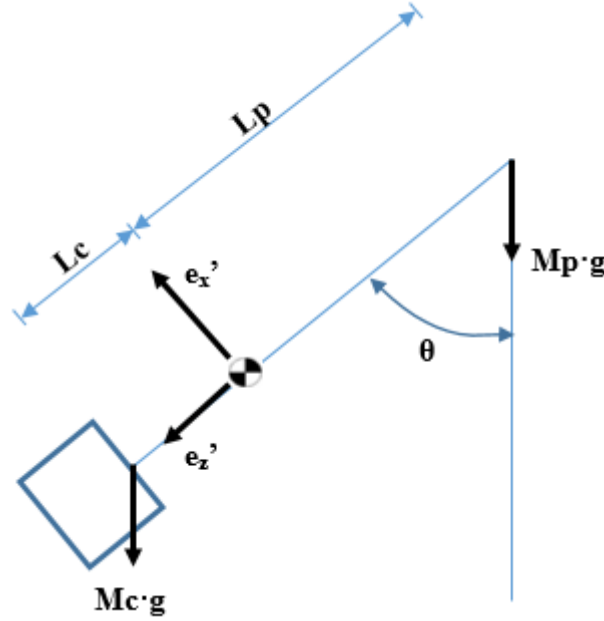


Figura 37: Esquema de la rotación sobre el eje Y

Como se puede observar en la figura anterior, existen dos fuerzas que provocan momento sobre el centro de masas del sistema, son el peso derivado de la masa del paracaídas y el peso que provoca la masa de la caja. Por lo tanto, se puede afirmar que, considerando positivo el sentido horario para los momentos, se tiene:

$$\vec{M}_{total\ en\ \theta} = \vec{M}_{paracaidas} - \vec{M}_{caja} \quad (4.47)$$

Para conocer el valor del momento que genera el paracaídas, es necesario, en primer lugar, descomponer el peso en las componentes que forman los ejes prima, es decir, que el momento generado por el paracaídas resulta:

$$\vec{M}_{paracaidas} = (M_p g \cos(\theta) \vec{e}_{z'} - M_p g \sin(\theta) \vec{e}_{x'}) \times l_p \vec{e}_{z'} \quad (4.48)$$

Que, si se resuelve el producto vectorial entre las fuerzas y el brazo de palanca, que conecta con el centro de masas del sistema y el centro de masas del paracaídas, resulta:

$$\vec{M}_{paracaidas} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ -M_p g \sin(\theta) & 0 & M_p g \cos(\theta) \\ 0 & 0 & l_p \end{vmatrix} = M_p g l_p \sin(\theta) \vec{e}_{y'}$$

De la misma manera en la que se ha planteado el momento de fuerzas provocado por el paracaídas se va a proceder a expresar el momento de fuerzas que genera el peso de la caja.

$$\vec{M}_{caja} = (M_c g \cos(\theta) \vec{e}_{z'} - M_c g \sin(\theta) \vec{e}_{x'}) \times l_c \vec{e}_{z'} \quad (4.49)$$



$$\vec{M}_{caja} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ -M_c g \sin(\theta) & 0 & M_c g \cos(\theta) \\ 0 & 0 & l_c \end{vmatrix} = M_c g l_c \sin(\theta) \vec{e}_{y'}$$

Por tanto, el momento total que se genera en el centro de masas del sistema como consecuencia de la rotación producida en el eje Y es:

$$\vec{M}_{total\ en\ \theta} = (M_p g l_p \sin(\theta) - M_c g l_c \sin(\theta)) \vec{e}_{y'} \quad (4.50)$$

Como se ha mencionado anteriormente, para conocer todos los momentos que se generan en todas las posibles rotaciones del sistema, es necesario conocer el estado de las cargas que generan momentos, por lo tanto, al igual que la rotación alrededor del eje Y era provocada por el momento que generaba la masa de la caja y del paracaídas sobre el centro de masas del sistema, en el caso de la rotación alrededor del eje X' (cuyo ángulo protagonista es  $\beta$ ) ocurre de la misma manera.

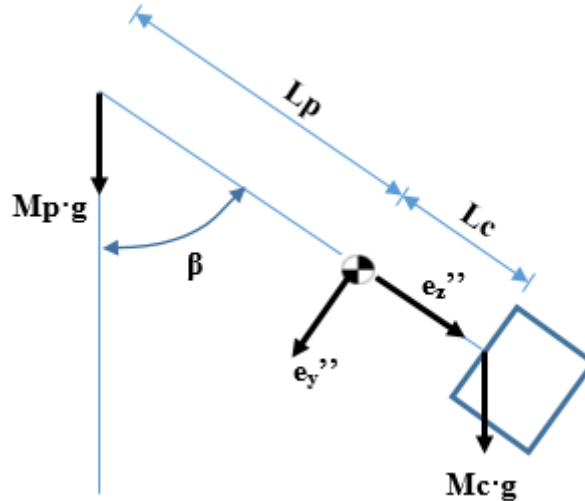


Figura 38: Esquema de la rotación sobre el eje X'

Al mantener el criterio de signos constante (sentido horario positivo), para el caso de la rotación sobre X', el momento de fuerzas que se produce sobre el centro de masas es:

$$\vec{M}_{total\ en\ \beta} = \vec{M}_{caja} - \vec{M}_{paracaídas} \quad (4.51)$$

Donde en esta ocasión el momento producido por el paracaídas tiene la forma:

$$\vec{M}_{paracaídas} = (M_p g \cos(\beta) \vec{e}_{z''} + M_p g \sin(\beta) \vec{e}_{y''}) \times l_p \vec{e}_{z''} \quad (4.52)$$

Que al resolver el producto vectorial anteriormente planteado resulta:

$$\vec{M}_{paracaidas} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'''} & \vec{e}_{y'''} & \vec{e}_{z'''} \\ 0 & M_p g \sin(\beta) & M_p g \cos(\beta) \\ 0 & 0 & l_p \end{vmatrix} = M_p g l_p \sin(\beta) \vec{e}_{x'''} \quad (4.52)$$

De la misma manera que ocurre con el paracaídas, el momento generado por el peso de la caja sobre el centro de masas del sistema se puede expresar como:

$$\vec{M}_{caja} = (M_c g \cos(\beta) \vec{e}_{z'''} + M_c g \sin(\beta) \vec{e}_{y'''}) \times l_c \vec{e}_{z'''} \quad (4.53)$$

Y al resolver el producto vectorial entre las fuerzas y el brazo de palanca resulta el momento de fuerzas final producido por la caja.

$$\vec{M}_{caja} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'''} & \vec{e}_{y'''} & \vec{e}_{z'''} \\ 0 & M_c g \sin(\beta) & M_c g \cos(\beta) \\ 0 & 0 & l_c \end{vmatrix} = M_c g l_c \sin(\beta) \vec{e}_{x'''} \quad (4.54)$$

Por tanto, el momento de fuerzas resultante como consecuencia de una posible rotación en torno al eje X' es resultado de la diferencia entre el momento producido por la caja sobre el centro total del sistema y el momento de fuerzas que produce el peso del paracaídas:

$$\vec{M}_{total\ en\ \beta} = (M_c g l_c \sin(\beta) - M_p g l_p \sin(\beta)) \vec{e}_{x'''} \quad (4.55)$$

En cuanto a la última rotación producida por el ángulo  $\phi$  (sobre el eje Z'') es necesario mencionar que al existir colinealidad entre la dirección de las fuerzas y el brazo de palanca, no se genera ningún momento de fuerzas en esta rotación. Teniendo en cuenta esta directriz, es inmediato pensar que acción o fuerza es la que produce la rotación del sistema sobre sí mismo, la respuesta a esta pregunta puede ser:

- En el momento de la suelta en el experimento, se ha podido generar una rotación propia involuntariamente, y que a medida que el sistema descienda, esta se haya podido amplificar por algún efecto en la variación de la inercia del cuerpo, o alguna acción externa como puede ser pequeñas ráfagas de viento.
- En el caso de realizar un segundo experimento, sería recomendable evitar la simetría en la inercia entre  $I_x$  e  $I_y$ , puesto que al suponer igualdad entre ambas se está presuponiendo un descenso simétrico entre ambos ejes, cosa difícil de averiguar.

Por tanto, sumando los momentos generados en todas las orientaciones posibles en el espacio, se obtiene el vector final  $\vec{M}$  que tiene la forma:

$$\vec{M} = \vec{M}_{total\ en\ \theta} + \vec{M}_{total\ en\ \beta} \quad (4.56)$$

$$\vec{M} = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \vec{e}_{y'} + (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \vec{e}_{x''} \quad (4.56)$$

Una vez que se conocen todas las componentes que forman los distintos términos de la ecuación 4.35 (que describe la dinámica de rotación mediante el teorema del momento cinético), se va a proceder a calcular cada término por separado, para facilitar el álgebra de la ecuación. Existen 3 términos claramente diferenciados, aunque uno de ellos ya se ha calculado en la descripción de los momentos de fuerza que actúan en el sistema. Por tanto:

$$\underbrace{\frac{d(I\omega)}{dt}}_1 + \underbrace{\omega \times (I\omega)}_2 = \underbrace{\vec{M}}_3 \quad (4.35)$$

- Término 1: Corresponde a la derivada temporal del momento cinético L, que utilizando la forma diferencial de la velocidad angular  $\omega$  se obtiene la expresión:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d(\omega)}{dt} = I \frac{d(\dot{\theta} \vec{e}_y + \dot{\beta} \vec{e}_{x'} + \dot{\phi} \vec{e}_{z''})}{dt} = I(\ddot{\theta} \vec{e}_y + \ddot{\beta} \vec{e}_{x'} + \ddot{\phi} \vec{e}_{z''})$$

- Término 2: Corresponde al producto vectorial entre la velocidad angular y el momento cinético L, que resulta:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{x'''} & \vec{e}_{y'''} & \vec{e}_{z'''} \\ p & q & r \\ I_x p & I_x q & I_z r \end{bmatrix} = (I_z q r - I_x q r) \vec{e}_{x'''} + (I_x p r - I_z p r) \vec{e}_{y'''} + (I_x p q - I_x p q) \vec{e}_{z'''} \quad (4.40)$$

Nótese, como la simetría impuesta al sistema en la simplificación (Ecuación 4.40) surte su efecto al anularse la componente en ejes cuerpo de Z en el producto vectorial.

- Término 3: Los momentos puntuales que se producen alrededor del centro de masas del sistema al completo, se ha calculado en el punto anterior, resultando:

$$\vec{M} = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \vec{e}_{y'} + (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \vec{e}_{x''}$$

Por tanto, si se sustituyen todos los términos anteriormente desarrollados en la ecuación del teorema del momento cinético (Ecuación 4.35), y se divide en tres ecuaciones, cada una con una componente espacial, se obtiene:

- Ecuación en X

$$I_x \ddot{\beta} \vec{e}_{x'} + (I_z q r - I_x q r) \vec{e}_{x'''} = (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \vec{e}_{x''} \quad (4.57)$$

- Ecuación en Y

$$I_x \ddot{\theta} \vec{e}_y + (I_x pr - I_z pr) \vec{e}_{y'''} = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \vec{e}_{y'} \quad (4.58)$$

- Ecuación en Z

$$I_z \ddot{\phi} \vec{e}_{z''} = 0 \quad (4.59)$$

A continuación, es necesario realizar las rotaciones de aquellos términos que no se encuentren expresados en ejes cuerpo. Debido a la gran cantidad de rotaciones que es necesario realizar, se ha decidido pasar todos los ejes prima y ejes absolutos a ejes prima-prima, para finalmente aplicar la rotación inversa de  $\phi$  y transformar por completo toda la ecuación a ejes cuerpo. Para los términos en el eje Y, hay que usar la rotación inversa en  $\theta$  y  $\beta$  (Expresada en la sección 4.4.1) mientras que para X únicamente la rotación de  $\beta$  resultando:

$$\begin{aligned} \vec{e}_y &= \vec{e}_{y'} = \cos(\beta) \vec{e}_{y''} - \sin(\beta) \vec{e}_{z''} \\ \vec{e}_{x'} &= \vec{e}_{x''} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Tras aplicar las transformaciones, es inmediato observar que como resultado de aplicar la rotación de ejes prima a ejes prima-prima, aparece un término de momentos en la ecuación de Z. A pesar de que como se ha mencionado con anterioridad no existen momentos generados sobre este eje, la causa de esta anomalía es simplemente el resultado de la descomposición del término de los momentos M en Y. Lo mismo ocurre con la aceleración angular de teta ( $\ddot{\theta}$ ) que, irremediablemente aparecerá en la ecuación de Z. Se obtienen las ecuaciones expresadas en ejes prima-prima:

- Ecuación en X

$$I_x \ddot{\beta} \vec{e}_{x''} + (I_z qr - I_x qr) \vec{e}_{x'''} = (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \vec{e}_{x''} \quad (4.61)$$

- Ecuación en Y

$$I_x \ddot{\theta} \cos(\beta) \vec{e}_{y''} + (I_x pr - I_z pr) \vec{e}_{y'''} = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \cos(\beta) \vec{e}_{y''} \quad (4.62)$$

- Ecuación en Z

$$(I_z \ddot{\phi} - I_x \ddot{\theta} \sin(\beta)) \vec{e}_{z''} = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \sin(\beta) \vec{e}_{z''} \quad (4.63)$$

Para finalizar, es necesario aplicar la última rotación con el fin de tener las tres ecuaciones de la dinámica de la rotación expresadas en ejes cuerpo. Para ello se va a utilizar la matriz de rotación inversa de  $\phi$  expresada en la sección 4.4.1:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{x'''} &= \cos(\phi) \vec{e}_{x''} - \sin(\phi) \vec{e}_{y''} \\ \vec{e}_{y'''} &= \sin(\phi) \vec{e}_{x''} + \cos(\phi) \vec{e}_{y''} \\ \vec{e}_{z'''} &= \vec{e}_{z''} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Tras realizar la transformación se obtiene el sistema de ecuaciones finales expresado en ejes cuerpo:

- Ecuación en X

$$I_x \ddot{\beta} \cos(\varphi) + I_x \ddot{\theta} \cos(\beta) \sin(\varphi) + (I_z q r - I_x q r) = M_x \quad (4.65)$$

Donde  $M_x$  representa:

$$M_x = (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \cos(\varphi) + (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \sin(\varphi) \cos(\theta)$$

- Ecuación en Y

$$I_x \ddot{\theta} \cos(\beta) \cos(\varphi) - I_x \ddot{\beta} \sin(\varphi) + (I_x p r - I_z p r) = M_y \quad (4.66)$$

Donde  $M_y$  representa:

$$M_y = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \cos(\varphi) \cos(\beta) - (M_c l_c - M_p l_p) g \sin(\beta) \sin(\varphi)$$

- Ecuación en Z

$$I_z \ddot{\phi} - I_x \ddot{\theta} \sin(\beta) = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \sin(\beta) \quad (4.67)$$

#### 4.4.3 Cinemática de la rotación

Una vez se ha descrito la dinámica, es decir, las causas que producen la rotación, es hora de conocer cómo es en sí el movimiento pendulatorio. Para describir la rotación y como varía esta con el tiempo, se conoce dos maneras de describirla (Ecuaciones 4.36 y 4.37):

- Rotaciones en ejes cuerpo medidas con el arduino:

$$\omega_1 = p \overrightarrow{e_{x'''}} + q \overrightarrow{e_{y'''}} + r \overrightarrow{e_{z'''}} \quad (4.36)$$

- Forma diferencial:

$$\omega_2 = \dot{\theta} \overrightarrow{e_y} + \dot{\beta} \overrightarrow{e_{x'}} + \dot{\phi} \overrightarrow{e_{z''}} \quad (4.37)$$

Por tanto, si se igualan ambas expresiones, se obtiene una descripción temporal de la rotación en todos los ejes, frente a los valores experimentales medidos en el módulo giróscopo. Se tiene, por tanto:

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (4.68)$$

$$p \overrightarrow{e_{x'''}} + q \overrightarrow{e_{y'''}} + r \overrightarrow{e_{z'''}} = \dot{\theta} \overrightarrow{e_y} + \dot{\beta} \overrightarrow{e_{x'}} + \dot{\phi} \overrightarrow{e_{z''}}$$

Sin embargo, es necesario observar cómo, aunque los términos que forman  $\omega_1$  están expresados en ejes cuerpo, su igual  $\omega_2$  no lo está. Se concluye que es necesaria aplicar la rotación de  $\vec{e}$  a  $\vec{e}_{'''}'$  al término  $\vec{e}_y$  y las rotaciones inversas de  $\beta$  y  $\phi$  al término  $\vec{e}_{x'}$  (estas transformaciones están descritas en el apartado 4.4.1).

Finalmente, y tras haber aplicado las transformaciones, se separan los términos por coordenadas espaciales, obteniéndose de esta manera el sistema:

$$p\vec{e}_{x'''} = \dot{\beta} \cos(\phi) \vec{e}_{x'''} + \dot{\theta} \cos(\beta) \sin(\phi) \vec{e}_{x'''} \quad (4.69)$$

$$q\vec{e}_{y'''} = \dot{\theta} \cos(\beta) \cos(\phi) \vec{e}_{y'''} - \dot{\beta} \sin(\phi) \vec{e}_{y'''} \quad (4.70)$$

$$r\vec{e}_{z'''} = -\dot{\theta} \sin(\beta) \vec{e}_{z'''} + \dot{\phi} \vec{e}_{z'''} \quad (4.71)$$

Si se expresa de manera matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \cos(\beta) \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\beta) \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Sin embargo, lo que se desea en realidad, es conocer la variación temporal de cada una de los componentes de las velocidades de rotación en el espacio, frente a los datos experimentales obtenidos, para así describir por completo la trayectoria en su totalidad. Esto quiere decir, que es necesario invertir la igualdad para expresar el vector  $(\dot{\beta}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  en función de una matriz que multiplique el vector  $(p, q, r)$ .

Desgraciadamente al no ser la matriz ortogonal, no basta con hacer simplemente la traspuesta de la matriz, es necesario obtener la inversa. Para ello se ha decidido aplicar el método de Gauss mediante operaciones elementales de fila, y como primer paso, es necesario comprobar si la matriz es invertible [8], por esta razón se debe cumplir:

$$\text{Existe } A^{-1} \text{ si } \det(A) \neq 0$$

Por lo que se tiene:

$$\begin{vmatrix} \cos(\phi) & \cos(\beta) \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\beta) \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 \end{vmatrix} = \cos(\beta) (\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2)$$

Por tanto, se puede concluir que la matriz A va a ser invertible siempre y cuando  $\beta$  tome valores distintos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ . Si se piensa en términos físicos, es muy difícil que el sistema pueda llegar a pendular si quiera cerca de los  $90^\circ$ , por lo que para el rango de valores de  $\beta$  en los que se trabaja este problema, la matriz A siempre será invertible.

Una vez se ha comprobado que la matriz es invertible, se puede proceder a calcular su inversa:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \cos(\varphi) & \cos(\beta)\sin(\varphi) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\beta)\cos(\varphi) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 1

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \cos(\varphi)^2 & \cos(\beta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi)^2 & -\cos(\beta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 2

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi)^2 & -\cos(\beta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 3

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -\sin(\varphi)^2 & 0 & 0 & -\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) & \sin(\varphi)^3 & 0 \\ \sin(\varphi)^2 & -\cos(\beta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 4

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -\sin(\varphi)^2 & 0 & 0 & -\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) & \sin(\varphi)^3 & 0 \\ 0 & -\cos(\beta)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) & \sin(\varphi)^3 - \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 5

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -\sin(\varphi)^2 & 0 & 0 & -\sin(\varphi)^2\cos(\varphi) & \sin(\varphi)^3 & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & 0 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 6

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & 0 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 1 \end{array} \right)$$

↓ Op 7

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{1 - \sin(\varphi)^2}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 1 \end{array} \right)$$

Donde las operaciones realizadas hasta llegar a la inversa son:

Número de operación	Descripción de la operación
1	Fila 1 $\cdot \cos(\varphi)$ y Fila 2 $\cdot (-\sin(\varphi))$
2	Fila 2 + Fila 1
3	Fila 1 $\cdot (-\sin(\varphi)^2)$
4	Fila 1 + Fila 2
5	Fila 2 $\cdot \left(-\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)}\right)$
6	Fila 1 $\cdot \left(\frac{1}{-\sin(\varphi)^2}\right)$ y Fila 2 + Fila 3
7	Fila 2 $\cdot \frac{1}{\sin(\beta)}$

**Tabla 6: Operaciones de fila realizadas a la matriz A**

De esta manera, se obtiene el sistema inicial invertido, obteniéndose así las variaciones temporales de los distintos ángulos de rotación como resultado de una matriz por el vector de velocidades de rotación conocidas, es decir:

$$\dot{\beta} = \cos(\varphi)p - \sin(\varphi)q \quad (4.73)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\beta)}p + \frac{1 - \sin(\varphi)^2}{\cos(\beta)\cos(\varphi)}q \quad (4.74)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)}p + \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)}q + r \quad (4.75)$$

O expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{1 - \sin(\varphi)^2}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 0 \\ \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} & \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

#### 4.4.4 Cinemática de la traslación

A la hora de describir el movimiento de traslación se debe pensar en el movimiento que sufre el sistema como consecuencia de su descenso. Es por esto, que el estudio cinemático de la traslación es sencillo, puesto que únicamente hay que declarar las variaciones temporales de la posición en cada instante de tiempo, obteniéndose así la velocidad existente del sistema para cada coordenada en el espacio. Es por esto que se obtiene:



$$\frac{dx}{dt} = V_x \quad (4.77)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y \quad (4.78)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z \quad (4.79)$$

#### 4.4.5 Dinámica de la traslación

A diferencia de la cinemática de traslación, la dinámica establece las diferentes causas que provocan el movimiento. Es por esta razón por la que la segunda ley de Newton resulta una herramienta ideal para conocer las causas y las fuerzas que dan lugar al movimiento.

Aunque ya se conocen las fuerzas que actúan sobre el sistema completo gracias a la figura 2, es necesario establecer y conocer sobre qué ejes se producen estas fuerzas, distinguiendo entre ejes cuerpo y ejes absolutos.

La distinta distribución de fuerzas es importante conocerla por si se da el caso de tener que realizar alguna rotación en alguno de los ejes, ya que como se ha explicado con anterioridad, la traslación es mucho más fácil de describir si se realiza en ejes absolutos, es decir, como si se observara el movimiento del sistema desde una posición estática en el suelo.

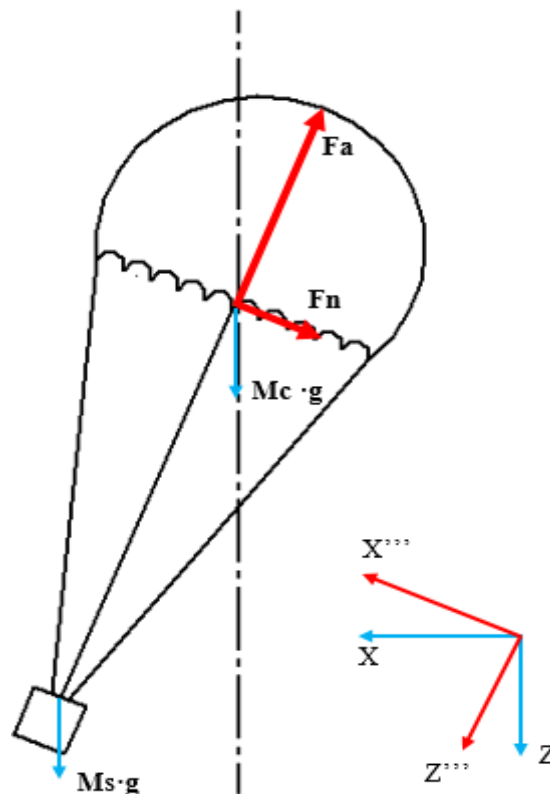


Figura 39: Esquema de fuerzas del sistema y sus respectivos ejes

Como se puede observar en la figura superior, los ejes coloreados en rojo hacen referencia a los ejes cuerpo (representados con una triple prima para seguir con la misma nomenclatura durante todo el problema) mientras que los ejes absolutos se representan en color azul. Como ha ocurrido a lo largo del problema, y aunque el esquema este representado en dos dimensiones, aparecerán ecuaciones en los tres ejes coordenados como resultado de aplicar las rotaciones convenientes. En este caso, y para describir la traslación adecuadamente, habrá que rotar las fuerzas que se encuentren aplicadas en ejes cuerpo a ejes absolutos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{Eje Z} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ejes cuerpo: } F_a \longrightarrow \text{Expresado como: } -F_a \overrightarrow{e_{z'''}} \\ \text{Ejes absolutos: } M_s \cdot g \text{ y } M_c \cdot g \longrightarrow \text{Expresados como: } M_T g \overrightarrow{e_z} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{Eje X} \longrightarrow \text{Ejes cuerpo: } F_n \longrightarrow \text{Expresado como: } -F_n \overrightarrow{e_{x'''}}$$

Por tanto, es necesario realizar las rotaciones de ambas fuerzas aerodinámicas expresadas en ejes cuerpo, para expresarlas en ejes absolutos. Este giro se lleva a cabo gracias a la matriz de rotación perteneciente a la ecuación 4.29, explicada en la sección 4.4.1. En suma, es necesario destacar como las fuerzas másicas no necesitan transformación alguna puesto que ya están expresadas en ejes absolutos, y, además, se ha decidido juntarlas en un único término  $M_T$  que hace referencia a la suma de ambas masas.

Por tanto, si se aplican las rotaciones anteriormente mencionadas resulta:

$$\begin{aligned} -F_n \overrightarrow{e_{z'''}} &= -F_n ((\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta)) \overrightarrow{e_x} \\ &\quad + \sin(\varphi) \cos(\beta) \overrightarrow{e_y} \\ &\quad + (-\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta)) \overrightarrow{e_z}) \quad (4.80) \\ -F_a \overrightarrow{e_{x'''}} &= -F_a (\cos(\beta) \sin(\theta) \overrightarrow{e_x} - \sin(\beta) \overrightarrow{e_y} + \cos(\beta) \cos(\theta) \overrightarrow{e_z}) \end{aligned}$$

Como se ha mencionado anteriormente, se puede observar como aparece una componente Y en las ecuaciones, a pesar de que el esquema de fuerzas, por una cuestión de simplicidad, se haya realizado en 2 dimensiones. Aplicando la segunda ley de Newton y separando cada una de las distintas fuerzas según su eje coordenado, se obtienen 3 ecuaciones que completan la descripción de la dinámica traslacional.

- Eje X

$$M_T \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_n (\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta)) - F_a (\cos(\beta) \sin(\theta)) \quad (4.81)$$

- Eje Y

$$M_T \frac{d^2 y}{dt^2} = F_a \sin(\beta) - F_n (\sin(\varphi) \cos(\beta)) \quad (4.82)$$

- Eje Z

$$M_T \frac{d^2 z}{dt^2} = M_T g - F_n(-\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta)) - F_a \cos(\beta) \cos(\theta) \quad (4.83)$$

Una vez se tiene la descripción completa de la dinámica traslacional, es conveniente volver a aplicar la sustitución de las fuerzas aerodinámicas por sus correspondientes fórmulas (Ecuaciones 4.11 y 4.12 de la sección 4.3.1) para introducir términos como la densidad del aire o los coeficientes aerodinámicos que se considerarán conocidos.

En suma a la sustitución anterior, se va a dividir ambos términos de las tres ecuaciones anteriores por  $M_T$

Resultando:

- Eje X

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta)) + C_a (\cos(\beta) \sin(\theta))) \quad (4.84)$$

- Eje Y

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (\sin(\varphi) \cos(\beta)) - C_a \sin(\beta)) \quad (4.85)$$

- Eje Z

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (-\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta)) + C_a (\cos(\beta) \cos(\theta))) \quad (4.86)$$

#### 4.4.6 Ecuaciones finales y condiciones iniciales

Una vez que se han desarrollado todas las ecuaciones que componen el modelo teórico de la trayectoria, que describen tanto el movimiento rotatorio como la traslación del sólido rígido, se tiene el sistema cerrado:

$$I_x \ddot{\beta} \cos(\varphi) + I_x \ddot{\theta} \cos(\beta) \sin(\varphi) + (I_z q r - I_x q r) = M_x \quad (4.65)$$

$$I_x \ddot{\theta} \cos(\beta) \cos(\varphi) - I_x \ddot{\beta} \sin(\varphi) + (I_x p r - I_z p r) = M_y \quad (4.66)$$

$$I_z \ddot{\varphi} - I_x \ddot{\theta} \sin(\beta) = (M_p l_p - M_c l_c) g \sin(\theta) \sin(\beta) \quad (4.67)$$

$$\dot{\beta} = \cos(\varphi) p - \sin(\varphi) q \quad (4.73)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\beta)} p + \frac{1 - \sin(\varphi)^2}{\cos(\beta) \cos(\varphi)} q \quad (4.74)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\sin(\beta)\sin(\varphi)}{\cos(\beta)}p + \frac{-\sin(\beta)\sin(\varphi)^2 + \sin(\beta)}{\cos(\beta)\cos(\varphi)}q + r \quad (4.75)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x \quad (4.77)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y \quad (4.78)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z \quad (4.79)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (\cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta)) + C_a (\cos(\beta) \sin(\theta))) \quad (4.84)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (\sin(\varphi) \cos(\beta) - C_a \sin(\beta))) \quad (4.85)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{\rho V^2 A}{2M_T} (C_n (-\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta)) + C_a (\cos(\beta) \cos(\theta))) \quad (4.86)$$

En cuanto a las condiciones iniciales que se deben establecer, es conveniente utilizar las mismas condiciones iniciales que las planteadas en el caso dos del modelo de Hume [4].

#### 4.4.7 Trabajos futuros

Aunque el trabajo matemático se encuentre acabado con la obtención del sistema de ecuaciones al completo, es inmediato pensar qué opciones de mejora se podrían implantar en el modelo para futuros trabajos y experimentos. Es por esto que se plantean las siguientes opciones:

- Si se desea, sería recomendable implementar el modelo teórico en Matlab. Es necesario mencionar que esta tarea dista mucho de ser sencilla, debido, principalmente, al gran tamaño de las ecuaciones con las que se trabaja y al mayor número de las mismas. En cuanto a la estructura del código puede ser semejante a la planteada para el modelo de dos dimensiones, pero con un considerable aumento de las variables y constantes del problema.
- Sería interesante encontrar una manera de medir la intensidad y la dirección del viento en futuros experimentos para poder introducirlo en los cálculos de la trayectoria.
- Se podría anular la simetría impuesta sobre la inercia del problema (Ecuación 4.40) y comparar los resultados para comprobar el impacto que supone

## 5. PRESUPUESTO Y APLICACIONES DIRECTAS

En este capítulo se va a tratar de ofrecer un presupuesto del experimento realizado, además de destacar la utilidad y el impacto de este estudio en la sociedad actual.

### 5.1 Presupuesto

Se ha analizado con detenimiento los principales costes que se han manejado a lo largo de todo el experimento. Con la ayuda de una hoja de Excel se va a obtener el presupuesto total gastado a lo largo de todo el estudio.

Descripción	Unidades	Coste/Unidad (€/Unidad)	Coste total (€)
Paraguas	1	7	7
Alambre	2	0.25	0.5
Caja	1	0.5	0.5
Plomo	3	1	3
Arduino y sensores	1	120	120
Ipad	1	350	350
Licencia Office	1	70	70
Licencia Matlab	1	800	800
Ordenador	1	850	850
	<b>Longitud total (m)</b>	<b>Coste/m (€/m)</b>	
Cuerdas	5.08	0.06	0.3048
	<b>Área total (m<sup>2</sup>)</b>	<b>Coste/m<sup>2</sup> (€/m<sup>2</sup>)</b>	
Papel de burbuja	0.04	1	0.04
	<b>Horas de trabajo (h)</b>	<b>Coste a la hora (€/h)</b>	
Coste de ingeniería	360	7.5	2700
<b>Total:</b>			<b>4901.34</b>

Tabla 7: Presupuesto del experimento

El presupuesto se ha planteado de manera aproximada, esto quiere decir que el coste total hace referencia al precio del experimento desde cero. En la realidad, para el experimento realizado se ha utilizado la licencia de estudiantes de Matlab (gratuita) y el arduino se ha reutilizado de otros experimentos de la universidad. Por tanto, el experimento ha sido muy barato en la realidad. El coste de ingeniería se ha calculado en función del número de horas que se ha estimado, coincidiendo con el número de créditos (30 horas por crédito) que la Universidad ha asignado a este proyecto. El coste por hora, es una estimación de lo que cobraría un ingeniero junior.

## 5.2 Aplicaciones directas del estudio

Como se ha mencionado en la sección 1.3, existen numerosas funciones de un paracaídas. Pero realmente existen pocas aplicaciones para las que este estudio sea válido, entre ellas destacan dos más comunes.

### 5.2.1 Suelta de una carga desde un avión

Ya sea para material humanitario o cargas de cualquier tipo dentro del ámbito militar, resulta de gran utilizar conocer la trayectoria que va a seguir el sistema carga-paracaídas, para conocer de manera aproximada, el lugar de aterrizaje de la carga. Las cualidades de esta aplicación que difieren sobre las realizadas en el experimento son:

- El lanzamiento de la carga se realiza desde un avión en movimiento, a diferencia del experimento realizado que se produjo el lanzamiento desde una posición estática. En los cálculos, esta condición se refleja en únicamente añadir una velocidad inicial al problema en la dirección de movimiento del avión.
- Dependiendo del tamaño de la carga, quizás sea necesario introducir en el problema los efectos aerodinámicos de la caja, en el caso de que sea de gran tamaño.
- Si se decide utilizar una campana diferente a la que se ha utilizado para realizar este estudio, será necesario variar los coeficientes aerodinámicos del problema, así como los valores dimensionales de la propia campana.



Figura 40: A400M descargando cargas desde su bodega

### 5.2.2 Globos meteorológicos

Los globos meteorológicos son un sistema de recogida de datos diariamente utilizado en aeropuertos y centrales de estudio meteorológico. Consiste básicamente en utilizar un globo de totex relleno de helio o hidrogeno que se lanza atado a una caja que contiene

una serie de sensores y dispositivos, capaces de medir las condiciones atmosféricas durante el ascenso. De esta manera se recogen un amplio abanico de datos con el fin de predecir con mayor precisión el tiempo, y como cambiará a lo largo del día. En los aeropuertos, se lanzan dos o tres de estos sistemas diariamente, con el fin de conocer los vientos, la temperatura y la humedad. Su función es la de informar a los pilotos que vayan a realizar una maniobra de aterrizaje o despegue en ese aeropuerto.

El globo asciende aproximadamente a unos 35000 metros sobre la superficie terrestre y allí explota. Una vez que la carga comienza a descender, se despliega el paracaídas que lleva incorporado en el exterior de la caja, para poder recuperar los datos adecuadamente. Los factores que varían con respecto al estudio realizado en este documento son:

- El tiempo del descenso es mucho mayor que en el caso del experimento realizado, ya que puede llegar a unas dos horas de duración. Por tanto, será necesario cambiar el tiempo de integración del problema. Además, aunque se haya despreciado la etapa de la apertura en este estudio, en el caso de los globos es necesario realizar un estudio más profundo de esta etapa, puesto que las condiciones atmosféricas presentas en las altitudes sobre las que el globo suele explotar, son mucho más adversas para la apertura del paracaídas.
- En este caso, sería totalmente necesario incluir los parámetros del viento. La razón principal es que, a causa de un largo descenso, sumado a lo ligero que es la caja con los sensores, el viento se convierte en un factor a tener muy en cuenta para el cálculo de la trayectoria.



**Figura 41: Globo meteorológico**

## **6. MARCO REGULADOR Y DERECHOS DE AUTOR**

### **6.1 Marco regulador**

En el caso del experimento realizado, no existe ninguna normativa que lo regule ya que, la altura desde la que se produjo el lanzamiento, no es considerado espacio aéreo, y por tanto, no fue necesario pedir permisos. Sin embargo, a la vista de lo expuesto en la sección anterior sobre el lanzamiento de globos meteorológicos, es necesario la aprobación del gestor de navegación aérea del país donde se vaya a realizar el lanzamiento.

En España, la normativa que regula estos lanzamientos es el Real Decreto 552/2014 [9] por el que se desarrolla el reglamento del aire. Dentro del artículo 14 de este documento, se hace referencia al lanzamiento de las sondas meteorológicas, y explica la necesidad de contactar con ENAIRE [10] (Gestor de la navegación aérea en España).

Para realizar un lanzamiento, es necesario realizar la solicitud unos dos meses previos al lanzamiento y adjuntar la siguiente información.

- Lugar y fecha de lanzamiento
- Objetivo del lanzamiento
- Trayectoria prevista

De esta manera ENAIRE sabrá si se invade algún espacio aéreo restringido, y si no es el caso, permitirá el lanzamiento.

### **6.2 Derechos de autor**

Este trabajo se encuentra bajo una licencia Creative commons. Esta licencia permite una libre circulación del documento sin ánimo de lucro, ni intención alguna de patentabilizar el estudio realizado.



## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Wikipedia, «Paracaídas,» 2018. [En línea]. Available: <https://es.wikipedia.org/wiki/Paraca%C3%ADdas>. [Último acceso: 14 Julio 2018].
- [2] DJ.Cockrell, «The Aerodynamics of Parachutes,» *Advisory Group For Aerospace Research & Development*, nº 295, pp. 1-71, 1987.
- [3] G. Guglieri, «Parachute-Payload System Flight Dynamics and Trajectory Simulation,» *International Journal of Aerospace Engineering*, pp. 1-17, 2012.
- [4] R. A. E. & R. Hume, «A Two-Dimensional Mathematical Model of a Parachute in Steady Descent,» *Aeronautical Research Council*, nº 1260, pp. 1-18, 1973.
- [5] H.Goldstein, «Cinemática del cuerpo sólido,» de *Mecánica Clásica*, Barcelona, Reverté S.A, 1994, pp. 161-239.
- [6] H.Goldstein, «Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido,» de *Mecánica Clásica*, Barcelona, Reverté S.A, 1994, pp. 239-305.
- [7] C. Pérez López, *Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*, Madrid: PEARSON Prentice Hall, 2007.
- [8] D. C.Lay, S. R.Lay y J. J.McDonald, *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Ciudad de México: Pearson, 2016.
- [9] Ministerio de Fomento, «Proyecto de Real Decreto por el que se desarrolla el Reglamento del aire y disposiciones operativos comunes para los servicios y procedimientos de navegación aérea y se modifica el Real Decreto 57/2002, de 18 de enero, por el que se aprueba el Reglamento de Circulación Aérea,» 27 Junio 2014. [En línea]. Available: [https://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/9E70F1F0-47F0-4D97-BC51-2CBC54234726/140567/PRD\\_SERAC\\_19122016.pdf](https://www.fomento.gob.es/NR/rdonlyres/9E70F1F0-47F0-4D97-BC51-2CBC54234726/140567/PRD_SERAC_19122016.pdf). [Último acceso: 22 Septiembre 2018].
- [10] ENAIRE, «Gestión del espacio aereo» 2018. [En línea]. Available: [https://www.enaire.es/servicios/atm/gestion\\_del\\_espacio\\_aereo\\_asm](https://www.enaire.es/servicios/atm/gestion_del_espacio_aereo_asm). [Último acceso: 22 Septiembre 2018].



## **ANEXO A: VÍDEOS DEL EXPERIMENTO**

Lanzamiento 1: <https://youtu.be/Tm3bpKU76xw>

Lanzamiento 2: <https://youtu.be/ZuBbluHsDE4>

Lanzamiento 3: [https://youtu.be/L\\_DhOnj-iOA](https://youtu.be/L_DhOnj-iOA)

**ANEXO B: CÓDIGO DE MATLAB****Script 1 (Solver)**

```

%
%   Implementacion del modelo de Hume de paracaídas bidimensional
%   Aeronautical Research Council, CP No. 1260
%
%   Victor Acero Sancho, April 2018
%

clear all; clc; close all

%
%   Definición de parámetros y constantes

CA = 0.8;           % Coeficiente aerodinámico de arrastre
CN = 0;             % Coeficiente de sustentación

Ms = 0.281;         % Masa de la carga [kg]
Mc = 0.075;         % Masa del paracaídas [kg]

R = 0.7;            % Radio del paracaídas [m]
L = 0.635;          % Longitud de las cuerdas [m]

rho = 1.2;          % Densidad del aire [kg/m^3]
g = 9.8;            % Gravedad[m/s^2]

tmax = 6.86;        % Tiempo total de integración [s]

%
%   Parámetros adicionales
%
Ar = pi*R^2;         % Área del paracaídas
Ma = (0.25 + 2/3)*pi*R^3*rho; % Masa aerodinámica (ec en pag 7)

Mp = Ms + Mc + Ma;   % Masa total
M = Ms + Mc;         % Masa real

%
%   Condiciones iniciales
%   x = [ the, dthe, z, dz, y, dy ]

x0 = [0, -0.1, 0, 0, 0, 0];

%
%   Llamada al solver
%
[t, x] = ode45(@(t,x)hume_model_derivs(t, x, ...
                                         CA, CN, Mc, Ma, Ms, rho, g, L, Ar, R),
...
            [0 tmax], x0);

%
%   Alojamiento de los resultados
%
```

```
the = x(:,1);
dthe = x(:,2);
z = x(:,3);
dz = x(:,4);
y = x(:,5);
dy = x(:,6);

% Trayectoria en Z
figure(1)
clf
plot(t, -z, 'r')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$z$ [m]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')

% Trayectoria en el espacio (y, z)
figure(2)
clf
plot(y, -z, 'r')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$y$ [m]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$z$ [m]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')

% Orientación en theta
figure(3)
clf
plot(t, the, 'g')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$\theta$ [rad]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')

% Velocidad lineal en Z
figure(4)
clf
plot(t, dz, 'b')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$dz/dt$ [m/s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')

% Velocidad lineal en Y
figure(5)
clf
plot(t, dy, 'b')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$dy/dt$ [m/s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')

% Velocidad de rotación
figure(6)
clf
plot(t, dthe, 'g')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$d\theta/dt$ [rad/s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
```

```
% Trayectoria en Y
figure(7)
clf
plot(t, y, 'r')
set(gca, 'FontSize', 18)
grid on
xlabel('$t$ [s]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
ylabel('$y$ [m]', 'FontSize', 18, 'Interpreter', 'LaTeX')
```

## Script 2 (Función)

```
function dx = hume_model_derivs(t, x, CA, CN, Mc, Ma, Ms, rho, g, L,
Ar, R);
%
% dx = hume_model_derivs(t, x, CA, CN, Mc, Ma, Ms, rho, g, L, Ar, R)
%
% Alojamiento de las variables y derivadas del problema
% x = [ the, dthe, z, dz, y, dy ]
%
%
% Inicializar vector dx
dx = zeros(size(x));

% x = [ the, dthe, z, dz, y, dy ]
% Llenar el vector x
the = x(1);
dthe = x(2);
z = x(3);
dz = x(4);
y = x(5);
dy = x(6);

% Computar variables intermedias
Ma = (0.25 + 2/3)*pi*R^3*rho; % Masa aerodinámica (ec en pag 7)
Mp = Ms + Mc + Ma; % Masa total
M = Ms + Mc; % Masa real

Uy = dy - L*Ms/Mp*dthe*cos(the);
Uz = dz + L*Ms/Mp*dthe*sin(the);
U2 = Uy^2 + Uz^2;
alpha = atan2(Uz, Uy)-the;

% Ecuaciones del sistema

% Ecuaciones de theta
dx(1) = dthe;
dx(2) = -g/(L*(1 + Mc/Ma))*sin(the) - CN*rho*Ar/(2*L*(Ma + Mc))*U2;

% Ecuaciones de Z
dx(3) = dz;
dx(4) = M*g/Mp ...
    -CA*rho*Ar/(2*Mp)*U2*cos(the) + CN*rho*Ar/(2*Mp)*U2*sin(the);
```

```
% Ecuaciones de Y
```

```
dx(5) = dy;
```

```
dx(6) = -CA*rho*Ar/(2*Mp)*U2*sin(the) - CN*rho*Ar/(2*Mp)*U2*cos(the);
```

**ANEXO C: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL ARDUINO**

Fabricante	Digi Internacional
Categoría de productos	Módulos Zigbee / 802.15.4
Banda de frecuencia	2.4 GHz
Rango de línea visual	100 ft, 300 ft
Frecuencia de datos	250 kbps
Sensibilidad	-92dBm
Voltaje operativo de suministro	2.8 V a 3.4 V
Corriente de suministro en recepción	45 mA
Corriente de suministro en transmisión	50 mA
Energía de salida	1 mW
Temperatura operativa máxima	+ 85 °C
Temperatura operativa mínima	-40 °C
Dimensiones	27.61 mm x 24.38 mm



**ANEXO D: MATRIZ  $M_{\varphi\beta\theta}$  Y  $M_{\varphi\beta\theta}^T$** 

$$M_{\varphi\beta\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\beta) & \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta) - \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta) - \sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\varphi) \cos(\beta) & \cos(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\beta) \sin(\theta) & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$M_{\varphi\beta\theta}^T = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta) & \cos(\varphi) \sin(\beta) \sin(\theta) - \sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\beta) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\beta) & \cos(\varphi) \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta) - \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\beta) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\beta) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$